CHAPITRE **7**

CORRECTIONS POUR LA RÉDUCTION DES OBSERVATIONS

7.1. CORRECTIONS DE MOUVEMENT PROPRE, DE PARALLAXE ET D'ABERRATION POUR LES ÉTOILES

7.1.1. Généralités

Les catalogues donnent l'ascension droite α_0 et la déclinaison δ_0 d'une étoile pour une époque de référence t_F et dans un repère de référence qui dépendent du catalogue. Nous supposerons que le repère de référence du catalogue est centré au barycentre du système solaire et qu'il est, du point de vue relativiste, la matérialisation d'un système de référence barycentrique BRS (*cf.* 4.1.1.2). Nous supposerons également le catalogue sans erreur.

L'ascension droite et la déclinaison de la direction de l'étoile vue par un observateur terrestre à la date t diffèrent de α_0 et δ_0 par suite de plusieurs effets que nous allons décrire. Nous ferons abstraction de la réfraction traitée au paragraphe 7.3.

7.1.1.1. Mouvement propre

Les étoiles sont animées de *mouvements propres* en ascension droite, μ_α, et en déclinaison, μ_δ, et éventuellement d'une *vitesse radiale* V_0 qui font varier leur position avec le temps. Les quantités μ_α, μ_δ et V_0 sont fournies par le catalogue ou, lorsqu'elles sont inconnues, supposées nulles.

7.1.1.2. Parallaxe

L'observateur O n'est pas placé au barycentre du système solaire B. La direction OE, où E désigne l'étoile, est donc différente de la direction BE donnée par le catalogue. C'est l'effet de *parallaxe*. On distingue la *parallaxe annuelle* due à la différence entre les directions BE et TE, où T désigne le centre de gravité terrestre, de la *parallaxe diurne* due à la différence entre les directions TE et OE. Pour une étoile, la parallaxe diurne est négligeable.

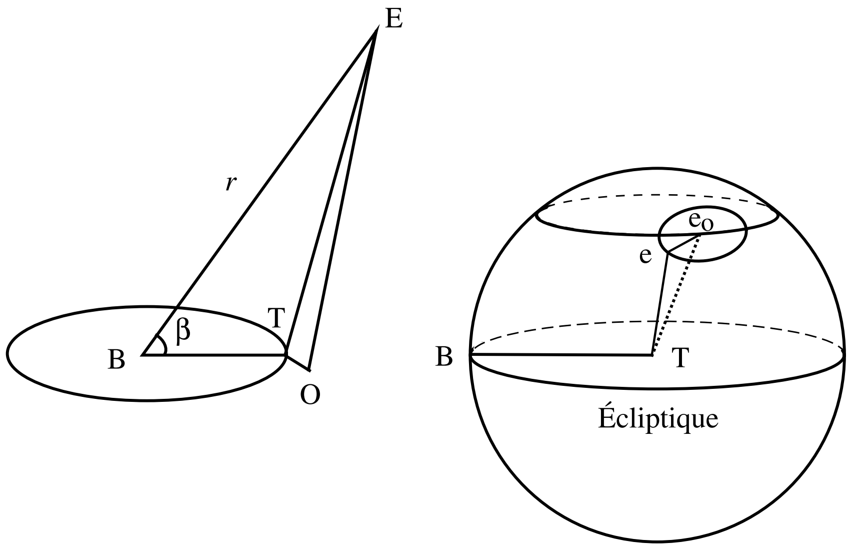

Fig. 7.1.1. Effet de la parallaxe.

En première approximation, T décrit autour de B un cercle situé dans le plan de l'écliptique avec une période annuelle. Soit e_0 le point de la sphère céleste géocentrique tel que Te_0 soit parallèle à BE, c'est-à-dire le point dont l'ascension droite et la déclinaison géocentriques sont celles fournies par le catalogue (Fig. 7.1.1). L'intersection e de TE et du plan tangent à la sphère céleste géocentrique en e_0 décrit, avec une période annuelle, une ellipse, dite *ellipse de parallaxe annuelle*, dont le centre est e_0 et dont le grand axe est parallèle au plan de l'écliptique. Le demi-grand axe est vu de la Terre sous un angle $1/r$ radian, où r est la distance de l'étoile au barycentre du système solaire en ua, et le demi-petit axe est vu sous un angle $\sin\beta/r$ radian, où β est la latitude écliptique de l'étoile. L'angle π_0 tel que $\sin\pi_0 = 1/r$ est par définition la *parallaxe de l'étoile*. π_0 est toujours inférieur à $1''$.

7.1.1.3. Aberration

La vitesse de la lumière est finie et l'observateur est en mouvement par rapport aux étoiles. L'ensemble de ces deux causes induit l'effet d'*aberration stellaire* ou *aberration des fixes*.

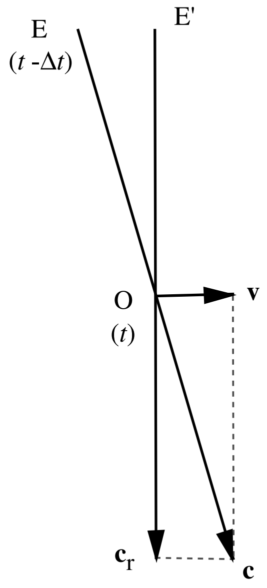

Fig. 7.1.2. Aberration stellaire.

L'observateur O reçoit à l'instant t la lumière émise par l'étoile E à l'instant $t - \Delta t$ où Δt, appelé *temps de lumière*, est le temps mis par la lumière pour atteindre l'observateur. Les mouvements propres de l'étoile étant faibles, on peut négliger les variations de Δt avec la position de l'observateur par rapport au barycentre du système solaire et avec le temps t, ce qui revient à considérer que le temps de lumière est une constante pour une étoile donnée. En mécanique newtonienne, la vitesse, dans un repère fixe, des photons arrivant à l'observateur est le vecteur $\mathbf{c}$ de module c, vitesse de la lumière, porté par EO (Fig. 7.1.2). Leur vitesse dans un repère relatif de directions fixes centré en O est

$$\mathbf{c_r} = \mathbf{c} - \mathbf{v}$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse de l'observateur dans le repère fixe. L'observateur voit l'étoile dans la direction OE$'$ opposée à $\mathbf{c_r}$ (Woolard et Clemence, 1966).

On distingue l'*aberration annuelle* dans laquelle $\mathbf{v}$ est la vitesse barycentrique du centre de gravité de la Terre, $\mathbf{v_T}$, et l'*aberration diurne*, effet résiduel de la vitesse $\mathbf{v_O}$ de l'observateur par rapport au centre de gravité de la Terre, l'ordre de grandeur de la seconde étant environ soixante fois plus petit que celui de la première.

Remarquons ici que les quantités α_0 et δ_0 fournies par le catalogue ne donnent pas la direction barycentrique de la position réelle de l'étoile à l'instant t_F mais celle de sa position à l'instant $t_F - \Delta t$ (Kaplan et al., 1989). La position barycentrique de E à l'instant $t - \Delta t$ est donc la position fournie par le catalogue corrigée des effets des mouvements propres et de la vitesse radiale entre t_F et t.

Supposons, comme en 7.1.1.2, le mouvement de la Terre autour du barycentre du système solaire circulaire uniforme et négligeons la parallaxe diurne, ce qui revient à supposer O en T. Sous l'effet de l'aberration annuelle, l'intersection e′ de la direction TE′ et du plan tangent à la sphère céleste géocentrique en e_0 décrit, avec une période annuelle, une ellipse, dite *ellipse d'aberration annuelle*, de centre e_0 et dont le grand axe est parallèle au plan de l'écliptique (Danjon, 1953). L'ellipse d'aberration annuelle est donc semblable à l'ellipse de parallaxe annuelle, mais son demi-grand axe est vu de T sous un angle d'environ 20″.5, indépendant de la distance de l'étoile, et le vecteur $\mathbf{e_0e'}$ est perpendiculaire au vecteur $\mathbf{e_0e}$ et de module supérieur (Fig. 7.1.3). Sous l'effet conjugué de la parallaxe et de l'aberration annuelles, l'observateur voit l'étoile dans la direction du point e″ tel que :

$$\mathbf{e_0e''} = \mathbf{e_0e} + \mathbf{e_0e'}$$

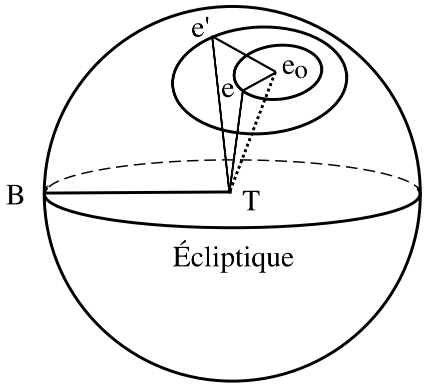

Fig. 7.1.3. Ellipses de parallaxe et d'aberration annuelles.

En mécanique relativiste, il y a lieu de tenir compte également de la courbure des rayons lumineux sous l'effet de la déviation gravitationnelle et du passage du système de référence barycentrique du catalogue au système de référence géocentrique ou topocentrique de l'observateur, selon que ce dernier est supposé au centre de la Terre ou sur sa surface (*cf.* 4.1.1.2).

7.1.1.4. Déplacements du plan de référence et de l'origine

Le plan de référence et l'origine adoptés par l'observateur et le catalogue sont en général différents. α_0 et δ_0 sont rapportés à l'équateur et l'équinoxe moyens de la date de référence du catalogue t_F ; l'ascension droite et la déclinaison observées sont le plus souvent rapportées à l'équateur et l'équinoxe vrais de la date t (*cf.* 4.2.1).

Ceci entraîne des corrections supplémentaires de précession (*cf.* 4.5.4) et de nutation (*cf.* 4.5.7).

7.1.1.5. Historique

Au dix-septième siècle et au début du dix-huitième, la parallaxe stellaire apparaît comme une conséquence de l'hypothèse de Copernic que les astronomes s'efforcent en vain d'observer. C'est en poursuivant ce but que Picard, en 1671, décèle un mouvement apparent de l'étoile polaire dont la période est annuelle et dont l'amplitude totale atteint $40''$ mais qui ne suit pas le mouvement prévu par l'effet de parallaxe. Il s'agit, en fait, de la première observation de l'aberration stellaire.

En 1676, Roemer découvre la vitesse finie de la lumière en observant des éclipses des satellites de Jupiter. Le phénomène sur lequel repose cette découverte est l'aberration planétaire (*cf.* 7.2.1), mais aucun lien n'est fait avec la constatation de Picard. La raison en est que l'on considère, à cette époque, la vitesse de la Terre comme négligeable devant la vitesse de la lumière (Hoskin, 1978).

Il faut attendre 1728 pour que Bradley, qui tentait d'observer la parallaxe de l'étoile γ Draconis et avait constaté, comme Picard, un mouvement apparent annuel d'amplitude totale $40''$ en quadrature avec le mouvement prévu par l'effet de parallaxe, explique ce phénomène par l'effet conjoint de la vitesse de la lumière et de celle de la Terre, et découvre ainsi l'aberration stellaire.

Bradley ne réussit pas à observer le déplacement apparent des étoiles sous l'effet de la parallaxe et déduisit de cet échec que les étoiles sont distantes de la Terre de plus de 400 000 ua (d'après Danjon, il faut en réalité réduire cette valeur de moitié). C'est en 1838 que Bessel puis Struve mesurent les premières parallaxes d'étoiles (61 du Cygne et Véga) par l'observation de l'effet de parallaxe.

L'existence d'un mouvement propre pour les étoiles a été constatée par Halley en 1718 mais la première liste de mouvements propres n'est publiée par Mayer qu'en 1775.

En 1868, Huggins est le premier à déceler une vitesse radiale pour l'étoile Sirius.

7.1.2. Corrections de mouvement propre

Les mouvements propres en ascension droite et en déclinaison μ_α et μ_δ d'une étoile, fournis par le catalogue, sont respectivement les dérivées par rapport au temps de l'ascension droite et de la déclinaison de l'étoile rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens de la date de référence t_F du catalogue. Nous supposerons μ_α et μ_δ exprimés en radian/siècle.

La vitesse radiale de l'étoile, V_0, fournie par le catalogue est la dérivée par rapport au temps de la distance $r = \mathrm{BE}$. Nous la supposerons exprimée en ua/siècle.

L'ascension droite et la déclinaison barycentriques de l'étoile à l'instant $t - \Delta t$ rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens de la date t_F (repère du catalogue), α et δ, sont donc :

$$\alpha = \alpha_0 + \mu_\alpha(t - t_F),$$
$$\delta = \delta_0 + \mu_\delta(t - t_F),$$

où $t - t_F$ est exprimé en siècle julien.

Il est utile pour les corrections ultérieures de connaître le vecteur position barycentrique de l'étoile à l'instant $t - \Delta t$. Désignons par $\mathbf{p_0}$ le vecteur unitaire de la direction $\mathrm{BE}(t_F - \Delta t)$ et par

$\mathbf{p_1}$ le vecteur unitaire de la direction BE$(t - \Delta t)$. La matrice colonne des composantes de $\mathbf{p_0}$ dans le repère du catalogue est :

$$\begin{pmatrix} p_X^0 \\ p_Y^0 \\ p_Z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 \cos\delta_0 \\ \sin\alpha_0 \cos\delta_0 \\ \sin\delta_0 \end{pmatrix}.$$

La matrice colonne des composantes de $\mathbf{p_1}$ dans le repère du catalogue est :

$$\begin{pmatrix} p_X^1 \\ p_Y^1 \\ p_Z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\delta \\ \sin\alpha \cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix}.$$

Le vecteur position barycentrique de l'étoile à l'instant $t_F - \Delta t$ est :

$$\mathbf{BE}(t_F - \Delta t) = r\mathbf{p_0}$$

avec, en unités astronomiques :

$$r = \frac{1}{\sin\pi_0}.$$

À l'instant $t - \Delta t$, il est :

$$\mathbf{BE}(t - \Delta t) = \rho\mathbf{p_1}$$

où $1/\rho$ est le sinus de la parallaxe à l'instant $t - \Delta t$, ρ étant exprimé en ua. En posant :

$$\mathbf{P_1} = \frac{\mathbf{BE}(t - \Delta t)}{r} = \frac{\rho}{r}\mathbf{p_1},$$

on obtient :

$$\mathbf{P_1} = \mathbf{p_0} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{p_0}}{\mathrm{d}t}(t - t_F) + \sin\pi_0 V_0 (t - t_F)\mathbf{p_0}. \tag{7.1.1}$$

Les composantes P_X^1, P_Y^1, P_Z^1 du vecteur $\mathbf{P_1}$ dans le repère du catalogue sont données par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} P_X^1 \\ P_Y^1 \\ P_Z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_X^0 \\ p_Y^0 \\ p_Z^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu_\alpha \sin\alpha_0 \cos\delta_0 - \mu_\delta \cos\alpha_0 \sin\delta_0 \\ \mu_\alpha \cos\alpha_0 \cos\delta_0 - \mu_\delta \sin\alpha_0 \sin\delta_0 \\ \mu_\delta \cos\delta_0 \end{pmatrix} (t - t_F) + \sin\pi_0 V_0 (t - t_F) \begin{pmatrix} p_X^0 \\ p_Y^0 \\ p_Z^0 \end{pmatrix}. \tag{7.1.2}$$

Dans cette formule, si μ_α et μ_δ sont en radian/siècle, V_0 est en ua/siècle et $t - t_F$ en siècle julien. $\mathbf{P_1}$ étant calculé, on obtient $\mathbf{p_1}$ et $1/\rho$ par :

$$\begin{aligned} \mathbf{p_1} &= \frac{\mathbf{P_1}}{|\,\mathbf{P_1}\,|}, \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{\sin\pi_0}{|\,\mathbf{P_1}\,|}. \end{aligned} \tag{7.1.3}$$

Lorsque la parallaxe de l'étoile est inconnue, on suppose π_0 nul dans les formules (7.1.1) et (7.1.2) ; $1/\rho$ est alors nul. Lorsque la vitesse radiale V_0 est inconnue, on suppose $\sin\pi_0 V_0$ nul ; la parallaxe à l'instant $t - \Delta t$, $1/\rho$, est alors égale à la parallaxe du catalogue, $\sin\pi_0$, à la précision de la formule (7.1.2).

7.1.3. Formulaire classique pour le calcul des corrections de parallaxe et d'aberration stellaires

7.1.3.1. Corrections de parallaxe annuelle

Le vecteur **TE** joignant la position de la Terre à l'instant t à la position de l'étoile à l'instant $t-\Delta t$ est, le barycentre du système solaire étant supposé fixe :

$$\mathbf{TE} = \mathbf{BE}(t-\Delta t) - \mathbf{BT}(t).$$

En posant :

$$\mathbf{x_T}(t) = \mathbf{BT}(t)$$

on obtient, avec les notations du paragraphe 7.1.2 :

$$\mathbf{TE} = \rho\mathbf{p_1} - \mathbf{x_T}(t),$$

et le vecteur unitaire $\mathbf{p}$ de la direction TE, c'est-à-dire de la direction de l'étoile affectée de la parallaxe annuelle, est donné par :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p_1} - \frac{\mathbf{x_T}(t)}{\rho}}{\mid \mathbf{p_1} - \frac{\mathbf{x_T}(t)}{\rho} \mid}.$$

Dans cette formule $\mathbf{x_T}(t)$ est le vecteur position barycentrique de la Terre, à l'instant d'observation t, dont les composantes sont exprimées en ua ; $\mathbf{p_1}$ et $1/\rho$ sont respectivement le vecteur unitaire de la direction barycentrique et la parallaxe de l'étoile à l'instant $t-\Delta t$, donnés par les formules (7.1.3) et (7.1.2).

À des termes d'ordre deux en $\sin\pi_0$ près, $\mathbf{p}$ s'écrit également :

$$\mathbf{p} = \Big(1 + \frac{\mathbf{p_1}\cdot\mathbf{x_T}(t)}{\rho}\Big)\mathbf{p_1} - \frac{\mathbf{x_T}(t)}{\rho}. \tag{7.1.4}$$

Si α_G et δ_G désignent l'ascension droite et la déclinaison de la direction TE dans le repère du catalogue, la formule (7.1.4) s'écrit de façon matricielle :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_G\cos\delta_G \\ \sin\alpha_G\cos\delta_G \\ \sin\delta_G \end{pmatrix} = \Big(1 + \frac{1}{\rho}\mathbf{p_1}\cdot\mathbf{x_T}(t)\Big)\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\delta \\ \sin\alpha\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{7.1.5}$$

avec

$$\mathbf{p_1}\cdot\mathbf{x_T}(t) = X\cos\alpha\cos\delta + Y\sin\alpha\cos\delta + Z\sin\delta.$$

Dans ces formules α et δ sont l'ascension droite et la déclinaison barycentriques de l'étoile à l'instant $t-\Delta t$ dans le repère du catalogue, c'est-à-dire les quantités obtenues en corrigeant l'ascension droite et la déclinaison du catalogue, α_0 et δ_0, des mouvements propres entre t_F et t ; X, Y, Z sont les coordonnées barycentriques, en ua, du centre de la Terre, à l'instant t, rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens de la date t_F (repère du catalogue). Si on néglige la vitesse radiale de l'étoile, $1/\rho$ est le sinus de la parallaxe de l'étoile fournie par le catalogue.

La formule (7.1.5) donne, pour les étoiles suffisamment éloignées du pôle, les formules approchées suivantes :

$$\alpha_G = \alpha + \frac{1}{\rho \cos\delta}(X \sin\alpha - Y \cos\alpha),$$
$$\delta_G = \delta + \frac{1}{\rho}(X \cos\alpha \sin\delta + Y \sin\alpha \sin\delta - Z \cos\delta).$$

Lorsque la date de référence du catalogue est J2000, X, Y, Z, composantes du vecteur $\mathbf{x_T}(t)$ dans le repère du catalogue, se calculent au moyen des coordonnées rectangulaires équatoriales géocentriques du Soleil X_S, Y_S, Z_S et des longitudes λ_i, latitudes β_i, rayons vecteurs r_i héliocentriques écliptiques des planètes autres que la Terre, à l'instant t, publiés dans la *Connaissance des Temps* au moyen de la relation :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -(1 - \frac{m_{TL}}{m_B}) \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix} - \sum_{i \neq 3} \frac{m_i}{m_B} r_i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_0 & -\sin\varepsilon_0 \\ 0 & \sin\varepsilon_0 & \cos\varepsilon_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\lambda_i \cos\beta_i \\ \sin\lambda_i \cos\beta_i \\ \sin\beta_i \end{pmatrix} \quad (7.1.6)$$

où m_{TL} désigne la masse du système Terre-Lune, m_B la somme des masses des planètes et du Soleil, m_i la masse de la planète i ($i = 1 \ldots 8$ de Mercure à Neptune) et ε_0 l'obliquité de l'écliptique en J2000. Pour un calcul approché, on peut confondre X, Y, Z avec $-X_S$, $-Y_S$, $-Z_S$, l'erreur n'excédant pas un pour cent.

7.1.3.2. Corrections globales d'aberration annuelle

L'observateur voit, à l'instant t, l'étoile dans la direction opposée au vecteur $\mathbf{c_r}$ (Fig. 7.1.2). En négligeant la parallaxe diurne, c'est-à-dire en supposant O en T, on a, avec les notations du paragraphe 7.1.3.1 :

$$\mathbf{c} = -c\mathbf{p}.$$

L'observateur voit donc l'étoile dans la direction $\mathbf{p} + \mathbf{v}/c$ où $\mathbf{v}$ est la vitesse barycentrique de l'observateur. Le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{p}}$ de la direction de l'étoile affectée de l'aberration annuelle (direction vue par un observateur placé au centre de la Terre) est donc :

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p} + \frac{\mathbf{v_T}}{c}}{\mid \mathbf{p} + \frac{\mathbf{v_T}}{c} \mid}$$

où $\mathbf{v_T}$ est la vitesse barycentrique de la Terre à l'instant t :

$$\mathbf{v_T} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x_T}.$$

À des termes d'ordre deux en $\mid \mathbf{v_T} \mid / \mathbf{c}$ près, $\hat{\mathbf{p}}$ s'écrit également :

$$\hat{\mathbf{p}} = (1 - \frac{1}{c}\mathbf{p} \cdot \mathbf{v_T})\mathbf{p} + \frac{1}{c}\mathbf{v_T}. \quad (7.1.7)$$

Si α_a et δ_a désignent l'ascension droite et la déclinaison *apparentes* de l'étoile, c'est-à-dire les coordonnées de la direction de l'étoile vue par un observateur placé au centre de la Terre, rapportées à l'équateur et l'équinoxe vrais de la date, la formule précédente s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_a \cos\delta_a \\ \sin\alpha_a \cos\delta_a \\ \sin\delta_a \end{pmatrix} = (1 - \tau_A \mathbf{p}\cdot\mathbf{v_T}) NP \begin{pmatrix} \cos\alpha_G \cos\delta_G \\ \sin\alpha_G \cos\delta_G \\ \sin\delta_G \end{pmatrix} + \tau_A NP \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \tag{7.1.8}$$

avec,

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{v_T} = X'\cos\alpha_G\cos\delta_G + Y'\sin\alpha_G\cos\delta_G + Z'\sin\delta_G,$$

où α_G et δ_G sont l'ascension droite et la déclinaison de la direction TE rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens de la date t_F et données par (7.1.5), X', Y' et Z' les composantes de la vitesse barycentrique de la Terre dans le même repère, τ_A le temps de lumière pour l'unité astronomique. Si τ_A est exprimé en jour, X', Y', Z' sont en ua/jour. N est la matrice de nutation pour la date t et P la matrice de précession équatoriale entre les dates t_F et t. On a donc, avec les notations des paragraphes 4.5.4 et 4.5.7 :

$$P = R_3(-90° - z_A) R_1(\theta_A) R_3(90° - \zeta_A)$$

et :

$$N = R_1(-\varepsilon'_A) R_3(-\Delta\psi) R_1(\varepsilon_A)$$

z_A, θ_A et ζ_A étant calculés entre t_F et t.

La formule (7.1.8) donne, pour les étoiles suffisamment éloignées du pôle, les formules approchées suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \alpha_v - \tau_A (X'_v \sin\alpha_v - Y'_v \cos\alpha_v) \frac{1}{\cos\delta_v} \\ \delta_a &= \delta_v - \tau_A (X'_v \cos\alpha_v \sin\delta_v + Y'_v \sin\alpha_v \sin\delta_v - Z'_v \cos\delta_v) \end{aligned} \tag{7.1.9}$$

où α_v et δ_v sont l'ascension droite et la déclinaison de la direction TE rapportées à l'équateur et l'équinoxe vrais (direction de l'étoile affectée de la parallaxe annuelle), X'_v, Y'_v, Z'_v les coordonnées de la vitesse barycentrique de la Terre dans un repère fixe, $\mathbf{v_T}$, rapportées à l'équateur et l'équinoxe vrais de la date. Si τ_A est exprimé en jour, X'_v, Y'_v, Z'_v sont en ua/jour. X'_v, Y'_v, Z'_v sont liés à X', Y', Z' par la relation :

$$\begin{pmatrix} X'_v \\ Y'_v \\ Z'_v \end{pmatrix} = NP \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}.$$

On obtient, en dérivant la formule (7.1.6) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = -(1 - \frac{m_{TL}}{m_B}) \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_S \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Y_S \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_S \end{pmatrix} - \sum_{i\neq 3} \frac{m_i}{m_B} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_0 & -\sin\varepsilon_0 \\ 0 & \sin\varepsilon_0 & \cos\varepsilon_0 \end{pmatrix} \Bigg[r_i \frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} -\sin\lambda_i \cos\beta_i \\ \cos\lambda_i \cos\beta_i \\ 0 \end{pmatrix} \\ + r_i \frac{\mathrm{d}\beta_i}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} -\cos\lambda_i \sin\beta_i \\ -\sin\lambda_i \sin\beta_i \\ \cos\beta_i \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \cos\lambda_i \cos\beta_i \\ \sin\lambda_i \cos\beta_i \\ \sin\beta_i \end{pmatrix} \Bigg]. \end{aligned}$$

Les quantités X_S, Y_S, Z_S, λ_i, β_i, r_i sont publiées dans la *Connaissance des Temps* sous forme de polynômes de Tchebychev (*cf.* chapitre 9) et leurs dérivées par rapport au temps, pour la date t, peuvent être calculées comme il est indiqué au paragraphe 9.4.3.

7.1.3.3. Aberration elliptique

En négligeant la vitesse du Soleil autour du barycentre du système solaire et en assimilant le mouvement héliocentrique de la Terre à un mouvement quasi-keplérien dans l'écliptique moyen de la date, les composantes de $\mathbf{v_T}$ rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens de la date s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} X'_m \\ Y'_m \\ Z'_m \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \begin{pmatrix} -\sin V \\ \cos\varepsilon_A \cos V \\ \sin\varepsilon_A \cos V \end{pmatrix} + \frac{ena}{\sqrt{1-e^2}} \begin{pmatrix} -\sin\varpi_T \\ \cos\varepsilon_A \cos\varpi_T \\ \sin\varepsilon_A \cos\varpi_T \end{pmatrix} \tag{7.1.10}$$

où a, e, ϖ_T sont les éléments moyens héliocentriques de la Terre (*cf.* 8.1.5.4) rapportés à l'écliptique et l'équinoxe moyens de la date, V sa longitude vraie, n son moyen mouvement moyen, ε_A l'obliquité moyenne de l'écliptique à la date t. La quantité :

$$k_A = \frac{na}{c\sqrt{1-e^2}}$$

est la constante de l'aberration pour la date t.

Dans la formule (7.1.10), $\mathbf{v_T}$ apparaît comme la somme d'un vecteur à variation rapide et d'un vecteur lentement variable, $c\mathbf{A}$. Les composantes de $\mathbf{A}$ rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens de la date sont :

$$\begin{pmatrix} A_{X,m} \\ A_{Y,m} \\ A_{Z,m} \end{pmatrix} = ek_A \begin{pmatrix} -\sin\varpi_T \\ \cos\varepsilon_A \cos\varpi_T \\ \sin\varepsilon_A \cos\varpi_T \end{pmatrix}.$$

La contribution du vecteur $\mathbf{A}$ à $\hat{\mathbf{p}}$:

$$\Delta\mathbf{p} = -(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})\mathbf{p} + \mathbf{A}$$

constitue l'*aberration elliptique*. Dans les catalogues antérieurs à 1984, on avait coutume d'inclure dans les positions des étoiles l'aberration elliptique calculée pour la date t_F du catalogue.

7.1.3.4. Formules de Bessel

En négligeant la composante du vecteur $\mathbf{v_T}$ perpendiculaire à l'écliptique moyen de la date, on a, avec les notations du paragraphe 7.1.3.2 :

$$\frac{Y'_v}{\cos\varepsilon'_A} = \frac{Z'_v}{\sin\varepsilon'_A}$$

où ε'_A est l'obliquité vraie $\varepsilon_A + \Delta\varepsilon$ à l'instant t. Les formules (7.1.9) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \alpha_v + (D'\sin\alpha_v + C'\cos\alpha_v)\frac{1}{\cos\delta_v} \\ \delta_a &= \delta_v + D'\cos\alpha_v\sin\delta_v + C'(-\sin\alpha_v\sin\delta_v + \cos\delta_v\tan\varepsilon'_A) \end{aligned} \tag{7.1.11}$$

avec,

$$C' = \tau_A Y'_v$$
$$D' = -\tau_A X'_v.$$

Elles correspondent aux corrections d'aberration, pour les étoiles, à utiliser avec le catalogue FK5 et les autres catalogues postérieurs à 1984.

Les contributions du vecteur $\mathbf{A}$ à C' et D' sont respectivement, en négligeant les corrections de nutation sur les coordonnées de $\mathbf{A}$:

$$\mathrm{c} = ek_A \cos\varepsilon_A \cos\varpi_T,$$
$$\mathrm{d} = ek_A \sin\varpi_T.$$

La *Connaissance des Temps* publie séparément les quantités c et d, qui varient lentement, et les quantités C et D telles que :

$$C = C' - \mathrm{c},$$
$$D = D' - \mathrm{d}.$$

Pour les catalogues antérieurs à 1984, par exemple le FK4, il faut retrancher des corrections complètes d'aberration annuelle données par (7.1.8), (7.1.9) ou (7.1.11) l'effet, pour la date t_F, de l'aberration elliptique déjà inclus dans le catalogue. En négligeant les variations de $\mathbf{A}$, c'est-à-dire de c et d, ceci revient à remplacer, dans les formules (7.1.11), C' par C et D' par D. Les formules ainsi obtenues portent le nom de *formules de Bessel.*

7.1.3.5. Corrections d'aberration diurne

Soit $\tilde{\mathbf{p}}$ le vecteur unitaire donnant la direction de l'astre vu par un observateur placé sur la surface terrestre. On aura de même :

$$\tilde{\mathbf{p}} = (1 - \frac{1}{c}\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{v_O})\hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{c}\mathbf{v_O}, \tag{7.1.12}$$

où $\mathbf{v_O}$ est la vitesse géocentrique de l'observateur dans un repère de directions fixes. Les composantes de $\mathbf{v_O}$, rapportées à l'équateur et l'équinoxe vrais de la date, sont, en négligeant le mouvement du pôle :

$$\begin{aligned}\xi'_v &= -\omega a_T \rho_O \cos\phi' \sin(\theta - L),\\ \eta'_v &= \omega a_T \rho_O \cos\phi' \cos(\theta - L),\\ \zeta'_v &= 0,\end{aligned} \tag{7.1.13}$$

où θ est le temps sidéral vrai de Greenwich GST, a_T le rayon équatorial terrestre, ω la vitesse de rotation de la Terre, L et ϕ' la longitude et la latitude géocentriques de l'observateur (*cf.* 10.2) rapportées à l'équateur terrestre et au méridien origine, $a_T\rho_O$ la distance géocentrique de l'observateur. L est compté positivement vers l'ouest. Si a_T est exprimé en mètres et ω en radian/seconde, ξ'_v, η'_v, ζ'_v sont en mètres/seconde.

Si α_{at} et δ_{at} désignent l'ascension droite et la déclinaison apparentes topocentriques de l'étoile, c'est-à-dire les coordonnées de $\tilde{\mathbf{p}}$ rapportées à l'équateur et l'équinoxe vrais de la date, la formule (7.1.12) s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha_{at}\cos\delta_{at}\\ \sin\alpha_{at}\cos\delta_{at}\\ \sin\delta_{at}\end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{c}\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{v_O}\right)\begin{pmatrix}\cos\alpha_a\cos\delta_a\\ \sin\alpha_a\cos\delta_a\\ \sin\delta_a\end{pmatrix} + \frac{\omega a_T\rho_O\cos\phi'}{c}\begin{pmatrix}-\sin(\theta - L)\\ \cos(\theta - L)\\ 0\end{pmatrix} \tag{7.1.14}$$

avec,

$$-\frac{1}{c}\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v_O} = \frac{\omega a_T}{c}\rho_O \cos\phi' \cos\delta_a \sin(\theta - L - \alpha_a),$$

$\theta - L - \alpha_a$ est l'angle horaire apparent H_a de l'étoile pour le lieu considéré. Avec les unités proposées pour les formules (7.1.13), c, vitesse de la lumière, est en mètres/seconde.

Pour les étoiles suffisamment éloignées du pôle, on obtient :

$$\begin{aligned}
\alpha_{at} &= \alpha_a + \frac{\omega a_T}{c}\rho_O \cos\phi' \cos(\theta - L - \alpha_a)\frac{1}{\cos\delta_a} \\
\delta_{at} &= \delta_a + \frac{\omega a_T}{c}\rho_O \cos\phi' \sin(\theta - L - \alpha_a)\sin\delta_a\,.
\end{aligned}$$

7.1.4. Formulaire relativiste pour le calcul des corrections de parallaxe et d'aberration stellaires

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le cadre de la relativité générale en nous limitant aux termes du second ordre en $1/c$. Nous appelons "vecteur" un élément d'un espace à trois dimensions dont les composantes sont les coordonnées spatiales de l'espace relativiste à quatre dimensions.

7.1.4.1. Déviation gravitationnelle des rayons lumineux

En mécanique newtonienne, un observateur fixe par rapport au repère du catalogue verrait, à l'instant t, une étoile dans la direction du vecteur unitaire $\mathbf{p}$ donné par (7.1.4). Cette direction est affectée des mouvements propres et de la vitesse radiale de l'étoile entre la date de référence t_F du catalogue et t, et de la parallaxe annuelle.

Plaçons nous, en mécanique relativiste, dans le BRS du catalogue, c'est-à-dire dans le système de référence barycentrique dont le repère de référence du catalogue est la matérialisation. Le même observateur verrait l'étoile dans la direction dont le vecteur unitaire, dans le BRS, est donné, en ne tenant compte que de la déviation gravitationnelle par le Soleil, par :

$$\mathbf{p} = \Big(1 + \frac{\mathbf{x_O}(t)\cdot\mathbf{p_1}}{\rho}\Big)\mathbf{p_1} - \frac{\mathbf{x_O}(t)}{\rho} - \frac{2}{c^2}\frac{Gm_S}{\mid \mathbf{r_{SO}}(t)\mid}\,\frac{(\mathbf{p_1}\cdot\mathbf{r_{SO}}(t))\mathbf{p_1} - \mathbf{r_{SO}}(t)}{\mid \mathbf{r_{SO}}(t)\mid + \mathbf{p_1}\cdot\mathbf{r_{SO}}(t)} \qquad (7.1.15)$$

avec,

$$\mathbf{r_{SO}}(t) = \mathbf{x_O}(t) - \mathbf{x_S}(t).$$

Dans ces formules $\mathbf{x_O}(t)$ et $\mathbf{x_S}(t)$ sont les vecteurs position de l'observateur et du Soleil à l'instant t dans le BRS ; t est le temps coordonnée dans l'échelle TDB ou TCB (*cf.* 3.8). $\mathbf{p_1}$ et $1/\rho$ sont calculés par la formule (7.1.3) à partir des données du catalogue. Gm_S est la constante héliocentrique de la gravitation, égale au carré de la constante de Gauss si $\mid \mathbf{r_{SO}}(t)\mid$ est en ua et c en ua/jour.

La formule (7.1.15) est issue des expressions données par Brumberg (1991), en négligeant les termes d'ordre deux en $\mid \mathbf{x_O}(t)\mid /\rho$ et $\mid \mathbf{r_{SO}}(t)\mid /\rho$ dans la partie indépendante de c et d'ordre un dans le coefficient de $1/c^2$. La partie en $1/c^2$ représente la déviation gravitationnelle des rayons lumineux par le Soleil.

On déduit de (7.1.15) l'expression matricielle suivante pour les composantes de $\mathbf{p}$ rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens de la date de référence t_F du catalogue :

$$\begin{pmatrix} p_X \\ p_Y \\ p_Z \end{pmatrix} = \Big[1 + \frac{\mathbf{x_O}(t)\cdot\mathbf{p_1}}{\rho} - \frac{2}{c^2}\frac{Gm_S}{\mid \mathbf{r_{SO}}(t)\mid}\frac{\mathbf{r_{SO}}(t)\cdot\mathbf{p_1}}{\mid \mathbf{r_{SO}}(t)\mid + \mathbf{r_{SO}}(t)\cdot\mathbf{p_1}}\Big]\begin{pmatrix} p^1_X \\ p^1_Y \\ p^1_Z \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$
$$+\frac{2}{c^2}\frac{Gm_S}{\mid \mathbf{r_{SO}}(t)\mid}\frac{1}{\mid \mathbf{r_{SO}}(t)\mid + \mathbf{r_{SO}}(t)\cdot\mathbf{p_1}}\begin{pmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{pmatrix} \qquad (7.1.16)$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathbf{x_O}(t)\cdot\mathbf{p_1} &= Xp^1_X + Yp^1_Y + Zp^1_Z \\ \mathbf{r_{SO}}(t)\cdot\mathbf{p_1} &= (X-X_S)p^1_X + (Y-Y_S)p^1_Y + (Z-Z_S)p^1_Z \\ \mid \mathbf{r_{SO}}(t)\mid &= \sqrt{(X-X_S)^2 + (Y-Y_S)^2 + (Z-Z_S)^2} \end{aligned}$$

où X, Y, Z et X_S, Y_S, Z_S sont, respectivement, les coordonnées spatiales barycentriques à l'instant t de l'observateur et du Soleil dans le BRS, rapportées à l'équateur et l'écliptique moyens de la date de référence du catalogue.

Les formules (7.1.15) et (7.1.16) sont les extensions relativistes des formules (7.1.4) et (7.1.5) en tenant compte en plus de la parallaxe diurne.

7.1.4.2. Coordonnées apparentes d'une étoile

Un observateur fixe dans le système de référence géocentrique (KGRS) associé au système de référence barycentrique du catalogue, ce qui est le cas pour un observateur placé au centre de la Terre, voit, à l'instant t, l'étoile dans la direction dont le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{p}}$, dans le KGRS, est donné par :

$$\hat{\mathbf{p}} = (1 - \frac{1}{c}\mathbf{p}\cdot\mathbf{v_T})\mathbf{p} + \frac{1}{c}\mathbf{v_T} + \frac{1}{c^2}\Big[(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v_T})^2\mathbf{p} - \frac{1}{2}(\mathbf{v_T})^2\mathbf{p} - \frac{1}{2}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v_T})\mathbf{v_T}\Big]. \qquad (7.1.17)$$

Dans cette formule, $\mathbf{v_T}$ est la vitesse barycentrique de la Terre à l'instant t dans le BRS ; $\mathbf{p}$, donné par la formule (7.1.15), est le vecteur unitaire de la direction dans laquelle l'observateur verrait l'étoile s'il était fixe dans le BRS et contient l'effet de la déviation gravitationnelle des rayons lumineux. La formule (7.1.17) est issue des expressions données par Brumberg (1991), dans lesquelles on a omis les termes dépendant de l'accélération barycentrique de la Terre. Ces termes s'annulent lorsque l'observateur est au centre de la Terre et sont négligeables lorsqu'il est sur la surface terrestre.

Les coordonnées apparentes de l'étoile, α_a et δ_a, définies au paragraphe 7.1.3.2 sont liées aux composantes $\hat{p}_{X,v}$, $\hat{p}_{Y,v}$, $\hat{p}_{Z,v}$ de $\hat{\mathbf{p}}$, rapportées à l'équateur et à l'équinoxe vrais de la date, par les relations classiques :

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_{X,v} \\ \hat{p}_{Y,v} \\ \hat{p}_{Z,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_a\cos\delta_a \\ \sin\alpha_a\cos\delta_a \\ \sin\delta_a \end{pmatrix}. \qquad (7.1.18)$$

La constante de la précession incluant la précession géodésique $\mathcal{P}_g$ (*cf.* 5.5.1), la matrice de précession-nutation entre la date t_F et la date t, dans le KGRS, est, en première approximation, égale au produit NP où N est la matrice de nutation pour la date t et P la matrice de précession entre la date t_F et la date t (*cf.* 7.1.3.2). On a donc, d'après (7.1.17) :

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_{X,v} \\ \hat{p}_{Y,v} \\ \hat{p}_{Z,v} \end{pmatrix} = \Big[1-\frac{1}{c}\mathbf{p}\cdot\mathbf{v_T}+\frac{1}{c^2}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v_T})^2-\frac{1}{2c^2}(\mathbf{v_T})^2\Big] NP \begin{pmatrix} p_X \\ p_Y \\ p_Z \end{pmatrix} + \Big[\frac{1}{c}-\frac{1}{2c^2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{v_T}\Big] NP \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \quad (7.1.19)$$

où X', Y', Z' sont les composantes de la vitesse barycentrique de la Terre à l'instant t rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens de la date de référence t_F du catalogue ; c est la vitesse de la lumière ; p_X, p_Y, p_Z sont donnés par la formule (7.1.15) et $\mathbf{p}\cdot\mathbf{v_T}$ est donné par :

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{v_T} = p_X X' + p_Y Y' + p_Z Z'.$$

X', Y', Z' et c sont exprimés dans la même unité, par exemple en ua/jour.

Les formules (7.1.17) et (7.1.19) sont les extensions relativistes des formules (7.1.7) et (7.1.8).

7.1.4.3. Coordonnées apparentes topocentriques d'une étoile

De la même façon, le vecteur unitaire $\tilde{\mathbf{p}}$, dans le système de référence topocentrique (TRS) centré sur l'observateur placé sur la surface terrestre, de la direction de l'astre vue, à l'instant t, par l'observateur est donné par :

$$\tilde{\mathbf{p}} = (1-\frac{1}{c}\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{v_O})\hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{c}\mathbf{v_O} + \frac{1}{c^2}\Big[(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{v_O})^2\hat{\mathbf{p}} - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{v_O})\mathbf{v_O} - \frac{1}{2}(\mathbf{v_O})^2\hat{\mathbf{p}}\Big], \quad (7.1.20)$$

où $\mathbf{v_O}$ est la vitesse géocentrique de l'observateur à l'instant t, dans le GRS, et où $\hat{\mathbf{p}}$ est donné par (7.1.17). Nous avons négligé dans cette formule l'effet de la précession – nutation topocentrique.

Dans les limites de l'approximation annoncée au début du paragraphe 7.1.4, les coordonnées apparentes topocentriques, α_{at} et δ_{at}, de l'étoile définies au paragraphe 7.1.3.5 sont données par :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_{at}\cos\delta_{at} \\ \sin\alpha_{at}\cos\delta_{at} \\ \sin\delta_{at} \end{pmatrix} = \Big[1-\frac{1}{c}\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{v_O}+\frac{1}{c^2}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{v_O})^2-\frac{1}{2c^2}(\mathbf{v_O})^2\Big]\begin{pmatrix} \cos\alpha_a\cos\delta_a \\ \sin\alpha_a\cos\delta_a \\ \sin\delta_a \end{pmatrix} + \Big[\frac{1}{c}-\frac{1}{2c^2}\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{v_O}\Big]\begin{pmatrix} \xi'_v \\ \eta'_v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.21)$$

avec

$$\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{v_O} = \xi'_v\cos\alpha_a\cos\delta_a + \eta'_v\sin\alpha_a\cos\delta_a,$$

ξ'_v et η'_v étant donnés par la formule (7.1.13). Avec les unités proposées pour cette formule, c est en mètres/seconde.

Les formules (7.1.20) et (7.1.21) sont les extensions relativistes des formules (7.1.12) et (7.1.14).

7.2. CORRECTIONS DE PARALLAXE ET D'ABERRATION POUR LES CORPS DU SYSTÈME SOLAIRE

7.2.1. Généralités

Pour les corps du système solaire, Soleil, planètes, satellites, comètes, on connaît, à partir des théories, la position barycentrique du corps P à chaque instant t. Nous poserons :

$$\mathbf{BP}(t) = \mathbf{x_P}(t).$$

Le vecteur position géocentrique géométrique de P à l'instant t est $\mathbf{TP}(t)$ joignant la position de la Terre à l'instant t à la position du corps au même instant :

$$\mathbf{TP}(t) = \mathbf{x_P}(t) - \mathbf{x_T}(t). \tag{7.2.1}$$

Un observateur O voit, à l'instant t, le corps selon la direction OP′ qui diffère de la direction du vecteur $\mathbf{TP}(t)$ (direction géométrique) par suite d'effets de parallaxe et d'aberration. Ces effets sont semblables, dans leur principe, à ceux affectant la direction observée des étoiles mais ils en diffèrent dans leur application.

Pour un corps du système solaire, la correction de parallaxe annuelle est remplacée par la formule (7.2.1) et la correction de parallaxe diurne, due à la différence entre O et T, n'est plus négligeable surtout pour des corps proches.

Pour l'aberration, on ne peut plus considérer que le temps de lumière Δt (temps mis par la lumière pour parcourir la distance corps-observateur) est une constante. Par ailleurs, les catalogues donnent, après corrections de mouvement propre et de parallaxe annuelle, la direction joignant la Terre à l'instant t à l'étoile à l'instant $t - \Delta t$ alors que la direction géométrique d'une planète ne dépend que de t. On réserve le nom d'*aberration planétaire* à l'aberration totale qui dévie la direction du corps P vue par un observateur placé au centre de gravité T de la Terre de sa direction géométrique.

Ce sont les variations du temps de lumière pour un corps du système solaire qui ont permis la découverte de la vitesse de la lumière par Roemer en 1676. Roemer, qui observait des éclipses des satellites de Jupiter, constata, pour le premier satellite, un retard de l'instant d'émersion ou d'immersion, par rapport à la valeur prédite par les tables de Cassini, lorsque l'éclipse avait lieu au voisinage de la conjonction et une avance lorsqu'elle avait lieu au voisinage de l'opposition. Il en déduisit que la lumière avait une vitesse finie, la moyenne de l'avance et du retard donnant une estimation du temps de lumière pour le Soleil. En effet, si on confond le Soleil et le barycentre du système solaire et si on suppose que les orbites héliocentriques de la Terre et de Jupiter sont des cercles de rayons r_T et r_J, le temps de lumière pour Jupiter est $(r_J - r_T)/c$ à l'opposition et $(r_J + r_T)/c$ à la conjonction. Si on suppose que les tables de Cassini donnent pour l'instant t la position géocentrique du satellite à l'instant $t - r_J/c$, c'est-à-dire une position affectée d'une aberration planétaire moyennée (*cf.* fin de 7.2.2.3), le retard à la conjonction et l'avance à l'opposition sont de r_T/c.

7.2.2. Formulaire classique pour le calcul des corrections de parallaxe et d'aberration concernant les corps du système solaire

7.2.2.1. Corrections de parallaxe diurne

La position topocentrique du corps est donnée par :

$$\mathbf{OP} = \mathbf{TP} - \mathbf{TO}.$$

En posant $\mathbf{y_O}(t) = \mathbf{TO}(t)$, on aura :

$$\mathbf{OP}(t) = \mathbf{x_P}(t) - \mathbf{x_T}(t) - \mathbf{y_O}(t). \tag{7.2.2}$$

Les composantes de $\mathbf{y_O}$ rapportées à l'équateur et l'équinoxe vrais de la date, exprimées en mètres, s'écrivent, avec les notations du paragraphe 7.1.3.5, en négligeant le mouvement du pôle :

$$\begin{aligned}
\xi_v &= \rho_O a_T \cos\phi' \cos(\theta - L)\\
\eta_v &= \rho_O a_T \cos\phi' \sin(\theta - L)\\
\zeta_v &= \rho_O a_T \sin\phi'.
\end{aligned}$$

Posons :

$$\Delta = \mid \mathbf{x_P}(t) - \mathbf{x_T}(t) \mid$$

et,

$$\Delta' = \mid \mathbf{x_P}(t) - \mathbf{x_T}(t) - \mathbf{y_O}(t) \mid .$$

Δ et Δ' sont respectivement les distances géocentriques et topocentriques du corps à l'instant t. Nous les supposerons exprimées en ua. Si α_{vt} et δ_{vt} désignent l'ascension droite et la déclinaison topocentriques à la date t, rapportées à l'équateur et l'équinoxe vrais de la date, et, α_v et δ_v l'ascension droite et la déclinaison géocentriques rapportées au même repère, la relation (7.2.2) s'écrit, de façon exacte, sous forme matricielle :

$$\frac{\Delta'}{\Delta}\begin{pmatrix}\cos\alpha_{vt}\cos\delta_{vt}\\ \sin\alpha_{vt}\cos\delta_{vt}\\ \sin\delta_{vt}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha_v\cos\delta_v\\ \sin\alpha_v\cos\delta_v\\ \sin\delta_v\end{pmatrix} - \frac{\rho_O a_T}{A\Delta}\begin{pmatrix}\cos\phi'\cos(\theta - L)\\ \cos\phi'\sin(\theta - L)\\ \sin\phi'\end{pmatrix} \tag{7.2.3}$$

où A est la longueur de l'unité astronomique dans la même unité que a_T, par exemple en mètre.

En négligeant le carré de $a_T/(A\Delta)$, on déduit de (7.2.3) les équations approchées suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta' &= \Delta - \frac{a_T\rho_O}{A}\Big(\cos\phi'\cos(\theta - L - \alpha_v)\cos\delta_v + \sin\phi'\sin\delta_v\Big),\\
\alpha_{vt} &= \alpha_v - \frac{a_T\rho_O}{A\Delta}\cos\phi'\sin(\theta - L - \alpha_v)\frac{1}{\cos\delta_v},\\
\delta_{vt} &= \delta_v + \frac{a_T\rho_O}{A\Delta}\Big(\cos\phi'\cos(\theta - L - \alpha_v)\sin\delta_v - \sin\phi'\cos\delta_v\Big),
\end{aligned}$$

où $\theta - L - \alpha_v$ est l'angle horaire H du corps pour le lieu considéré.

7.2.2.2. Temps de lumière

L'observateur O reçoit à l'instant t la lumière réfléchie (ou émise) par le corps à l'instant $t - \Delta t$, où Δt est le temps de lumière entre le corps et l'observateur. Pour un observateur placé en T, on aura :

$$\Delta t = \frac{\mid \mathbf{x_T}(t) - \mathbf{x_P}(t - \Delta t) \mid}{c}. \tag{7.2.4}$$

En pratique Δt se calcule par itération à partir de la formule (7.2.4) avec une valeur initiale égale à zéro. Pour tenir compte de la parallaxe diurne (*cf.* 7.2.2.1), il faut remplacer $\mathbf{x_T}(t)$ par $\mathbf{x_T}(t) + \mathbf{y_O}(t)$.

7.2.2.3. Corrections d'aberration planétaire, coordonnées apparentes

Le principe est le même qu'au paragraphe 7.1.1.3. La partie en trait plein de la figure 7.2.1 est analogue à la figure 7.1.2. On a placé de plus sur la figure 7.2.1 la direction géométrique de la planète à l'instant t.

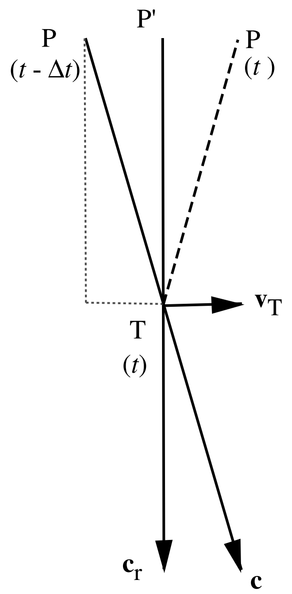

Fig. 7.2.1. Aberration planétaire.

La vitesse dans un repère fixe des photons arrivant à l'observateur est :

$$\mathbf{c} = c\frac{\mathbf{x_T}(t) - \mathbf{x_P}(t - \Delta t)}{\mid \mathbf{x_T}(t) - \mathbf{x_P}(t - \Delta t) \mid} \tag{7.2.5}$$

et leur vitesse relative dans un repère de directions fixes centré en T :

$$\mathbf{c_r} = \mathbf{c} - \mathbf{v_T}(t),$$

où $\mathbf{v_T}$ est la vitesse barycentrique de la Terre.

En utilisant (7.2.4), on obtient :

$$\mathbf{c_r} = \frac{1}{\Delta t}\Big(\mathbf{x_T}(t) - \mathbf{x_P}(t-\Delta t)\Big) - \mathbf{v_T}(t).$$

Le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{p}}$ de la *direction apparente* du corps, c'est-à-dire de la direction du corps vue par un observateur placé en T, à l'instant t, est donc :

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{x_P}(t-\Delta t) - \mathbf{x_T}(t) + \Delta t\, \mathbf{v_T}(t)}{\mid \mathbf{x_P}(t-\Delta t) - \mathbf{x_T}(t) + \Delta t\, \mathbf{v_T}(t) \mid}.$$

L'ascension droite et la déclinaison de la direction apparente rapportées à l'équateur et l'équinoxe vrais de la date t constituent les *coordonnées apparentes*, α_a et δ_a du corps P à la date t.

En supposant le mouvement de la Terre rectiligne uniforme entre les instants $t - \Delta t$ et t, on peut écrire :

$$\mathbf{x_T}(t-\Delta t) = \mathbf{x_T}(t) - \Delta t\, \mathbf{v_T}(t).$$

La direction apparente du corps à l'instant t est donc approximativement la direction joignant la position de la Terre à l'instant $t - \Delta t$ à la position du corps à l'instant $t - \Delta t$, c'est-à-dire la direction du vecteur position géocentrique du corps à l'instant $t - \Delta t$ (Fig. 7.2.1).

On a donc approximativement :

$$\alpha_a(t) = \alpha_v(t - \Delta t)$$
$$\delta_a(t) = \delta_v(t - \Delta t).$$

7.2.2.4. Coordonnées astrométriques

La direction du vecteur $\mathbf{c}$ donnée par (7.2.5), c'est-à-dire la direction joignant la position de la Terre à l'instant t à la position du corps à l'instant $t - \Delta t$ est de même nature que la direction d'une étoile fournie par un catalogue une fois faites les corrections de mouvement propre et de parallaxe annuelle. Nous l'appellerons *direction astrométrique* du corps à l'instant t. On passe de la direction astrométrique à la direction apparente au moyen des corrections d'aberration annuelle (*cf.* 7.1.3.2).

On appelle *coordonnées astrométriques* d'un corps du système solaire à l'instant t l'ascension droite et la déclinaison de la direction astrométrique de ce corps à l'instant t, rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens d'une date de référence t_F, J2000 pour les éphémérides actuelles.

On passe des coordonnées astrométriques d'un corps à ses coordonnées apparentes, α_a et δ_a, au moyen des formules (7.1.8) où α_G et δ_G représentent maintenant les coordonnées astrométriques du corps.

Avant 1984, les coordonnées astrométriques que nous venons de définir portaient le nom de *coordonnées astrographiques* et on réservait le nom de coordonnées astrométriques à des coordonnées astrographiques affectées de l'aberration elliptique, de même que les coordonnées des étoiles publiées par les catalogues. Cet usage a été aboli par l'Union Astronomique Internationale à partir de 1984.

7.2.2.5. Corrections d'aberration diurne

Les corrections d'aberration diurne pour un corps du système solaire se calculent de la même façon que pour une étoile (*cf.* 7.1.3.5).

7.2.3. Formulaire relativiste pour le calcul des corrections de parallaxe et d'aberration concernant les corps du système solaire

7.2.3.1. Temps de lumière

Sous l'influence de la déviation gravitationnelle, le temps mis par la lumière pour aller du corps P à l'observateur devient :

$$\Delta t = \frac{|\,\mathbf{x_O}(t) - \mathbf{x_P}(t-\Delta t)\,|}{c} + \frac{2}{c^3} G m_S \ln \frac{|\,\mathbf{r_{SO}}(t)\,| + |\,\mathbf{r_{SP}}(t-\Delta t)\,| + |\,\mathbf{x_O}(t) - \mathbf{x_P}(t-\Delta t)\,|}{|\,\mathbf{r_{SO}}(t)\,| + |\,\mathbf{r_{SP}}(t-\Delta t)\,| - |\,\mathbf{x_O}(t) - \mathbf{x_P}(t-\Delta t)\,|}. \tag{7.2.6}$$

Les notations sont celles des paragraphes 7.1.4.1 et 7.2.1 avec de plus :

$$\mathbf{r_{SP}}(t) = \mathbf{x_P}(t) - \mathbf{x_S}(t).$$

La formule (7.2.6) est l'extension relativiste de la formule (7.2.4).

7.2.3.2. Déviation gravitationnelle des rayons lumineux. Coordonnées astrométriques

En mécanique newtonienne, un observateur fixe par rapport à un repère absolu verrait un corps du système solaire dans la direction $\mathrm{O}(t)\mathrm{P}(t-\Delta t)$. Lorsque O est en T, cette direction est appelée la direction astrométrique du corps (*cf.* 7.2.2.4).

En mécanique relativiste, un observateur fixe dans un système de référence barycentrique verrait un corps du système solaire dans la direction du vecteur unitaire $\mathbf{p}$ du BRS donné par :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{x_P}(t-\Delta t) - \mathbf{x_O}(t)}{|\,\mathbf{x_P}(t-\Delta t) - \mathbf{x_O}(t)\,|} - \frac{2Gm_S}{c^2} \times \tag{7.2.7}$$
$$\frac{\Big[\big(\mathbf{x_P}(t-\Delta t) - \mathbf{x_O}(t)\big)\cdot \mathbf{r_{SO}}(t)\Big]\mathbf{r_{SP}}(t-\Delta t) - \Big[\big(\mathbf{x_P}(t-\Delta t) - \mathbf{x_O}(t)\big)\cdot \mathbf{r_{SP}}(t-\Delta t)\Big]\mathbf{r_{SO}}(t)}{|\,\mathbf{x_P}(t-\Delta t) - \mathbf{x_O}(t)\,||\,\mathbf{r_{SO}}(t)\,|\,\Big(|\,\mathbf{r_{SP}}(t-\Delta t)\,||\,\mathbf{r_{SO}}(t)\,| + \mathbf{r_{SP}}(t-\Delta t)\cdot \mathbf{r_{SO}}(t)\Big)}.$$

La direction astrométrique du corps s'obtient en remplaçant $\mathbf{x_O}$ par $\mathbf{x_T}$ dans (7.2.7). Les coordonnées astrométriques du corps sont l'ascension droite et la déclinaison de $\mathbf{p}$ rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens de la date de référence t_F, J2000 pour les éphémérides actuelles.

7.2.3.3. Coordonnées apparentes d'un corps du système solaire

Un observateur fixe dans le système de référence géocentrique KGRS associé au système de référence barycentrique utilisé (ce qui est le cas d'un observateur placé au centre de la Terre) voit le corps P dans la direction du vecteur unitaire du KGRS, $\hat{\mathbf{p}}$, donné par la formule (7.1.17) dans laquelle $\mathbf{p}$ est donné par la formule (7.2.7).

Les coordonnées apparentes du corps rapportées à l'équateur et à l'équinoxe vrais de la date sont données par les formules (7.1.18) et (7.1.19) dans lesquelles p_X, p_Y, p_Z sont les composantes du vecteur $\mathbf{p}$ donné par (7.2.7), rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens de la date t_F.

7.2.3.4. Coordonnées apparentes topocentriques d'un corps du système solaire

Le vecteur unitaire $\tilde{\mathbf{p}}$, dans le système de référence topocentrique centré sur un observateur placé sur la surface terrestre, de la direction du corps effectivement vu par l'observateur à l'instant t est donné par la formule (7.1.20) dans laquelle $\hat{\mathbf{p}}$ est calculé à partir de la formule (7.1.17) et de la formule (7.2.7).

Les coordonnées apparentes topocentriques sont données par la formule (7.1.21) dans laquelle les coordonnées apparentes sont calculées selon la méthode donnée en 7.2.3.3.

7.3. LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE

La direction des astres, telle qu'elle est donnée par des instruments observant depuis le sol, est modifiée par la présence de l'atmosphère. Les rayons lumineux sont en effet réfractés par l'atmosphère terrestre. Si l'on admet que les couches d'égal indice de réfraction de l'air sont horizontales, le rayon réfléchi reste dans un plan vertical. On appelle réfraction astronomique, ou simplement réfraction, l'angle

$$R = z - z_0,$$

où z_0 est la distance zénithale observée de l'astre et z la distance zénithale qu'il aurait s'il n'y avait pas d'atmosphère.

Si les couches d'air n'étaient pas toutes horizontales, il y aurait une composante en azimut, appelée réfraction latérale, parfois soupçonnée dans des visées géodésiques. Toutefois comme elle serait due à des effets thermiques localisés et non permanents, la théorie de la réfraction astronomique ne retient pas ce phénomène.

7.3.1. Théorie approchée de la réfraction astronomique

7.3.1.1. Formule de Laplace

Pour calculer la réfraction atmosphérique, on fait généralement l'hypothèse simplificatrice que les couches d'égal indice de l'atmosphère sont localement des sphères centrées en un point O au voisinage du centre de la Terre, sur la verticale de l'observateur situé en Ω.

Soit une couche infinitésimale d'épaisseur $\mathrm{d}r$ comprise entre des distances au centre r et $r + \mathrm{d}r$ et d'indice de réfraction n (Fig. 7.3.1). Un rayon lumineux vient du milieu extérieur d'indice $n+\mathrm{d}n$, entre dans la couche au point N et ressort en M. Appelons respectivement $\zeta + \mathrm{d}\zeta$ et ζ les angles que ce rayon fait avec les droites ON et OM. Soit enfin $\mathrm{d}\theta$ l'angle (OM, ON). On a, dans le triangle OMN la relation

$$r \sin\zeta = (r + \mathrm{d}r)\sin(\zeta - \mathrm{d}\theta).$$

Par ailleurs, la loi de Descartes sur la réfraction, appliquée au point N, donne

$$n \sin(\zeta - \mathrm{d}\theta) = (n + \mathrm{d}n)\sin(\zeta + \mathrm{d}\zeta),$$

soit, en éliminant $\zeta - \mathrm{d}\theta$ entre ces deux équations,

$$nr \sin\zeta = (n + \mathrm{d}n)(r + \mathrm{d}r)\sin(\zeta + \mathrm{d}\zeta). \tag{7.3.1}$$

Cette quantité est par conséquent un invariant tout le long du rayon lumineux. Écrit sous forme différentielle, cela donne

$$nr \cos\zeta \mathrm{d}\zeta + n \sin\zeta \mathrm{d}r + r \sin\zeta \mathrm{d}n = 0.$$

Dans le triangle OKM, on a

$$z = \zeta + \theta,$$

ou

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}\zeta + \mathrm{d}\theta.$$

Enfin, dans le triangle MHN, on a la relation

$$\mathrm{d}r \sin\zeta = r\, \mathrm{d}\theta \cos\zeta.$$

Si on élimine $\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}\zeta$ entre les trois équations précédentes, on obtient

$$\mathrm{d}n = -n \cot\zeta\, \mathrm{d}z,$$

soit, en intégrant entre l'infini ($n = 1$) et le sol ($n = n_0$),

$$R = z - z_0 = \int_1^{n_0} \frac{\tan\zeta \mathrm{d}n}{n}.$$

L'invariant (7.3.1) ramené au niveau de l'observateur donne

$$nr \sin\zeta = n_0 r_0 \sin z_0$$

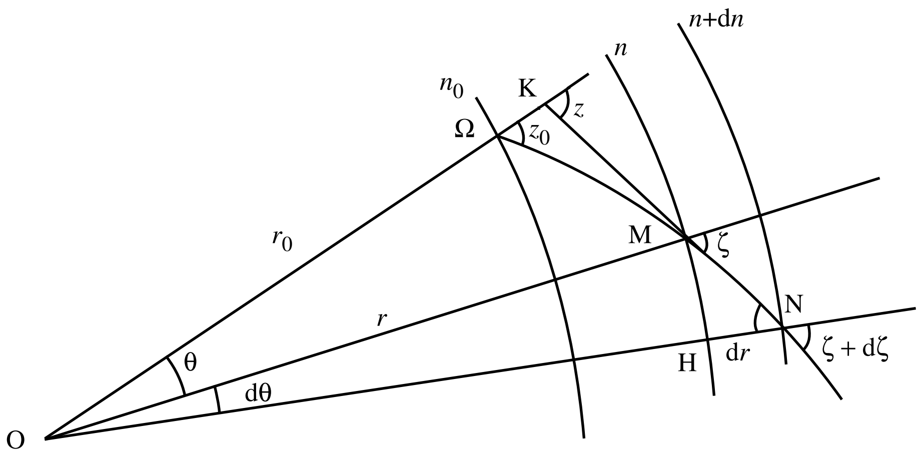

Fig. 7.3.1. Réfraction à travers des couches atmosphériques sphériques.

ce qui permet de calculer tan ζ en fonction de nr, si bien que R s'écrit

$$R = \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{\mathrm{d}n}{n\sqrt{(\frac{nr}{n_0 r_0})^2 - \sin^2 z_0}}, \tag{7.3.2}$$

qui donne la valeur de R en fonction de la distribution en hauteur de l'indice de réfraction $n{=}n(r)$.

Cette formule, qui n'est exacte que pour une Terre supposée sphérique, peut être écrite en fonction de deux petits paramètres :

– La réfractivité au sol $\alpha = n_0 - 1$.

On remarquera que $n - 1$ est proportionnel au poids spécifique (masse volumique $\times$ accélération de la pesanteur) ρ de l'air.

De ce fait,

$$n - 1 = \alpha \frac{\rho}{\rho_0}, \tag{7.3.3}$$

où ρ_0 est le poids spécifique de l'air au sol.

– Le petit paramètre β défini comme suit

$$\beta = \frac{1}{\rho_0 r_0} \int_0^{\infty} \rho \mathrm{d}h = \frac{p}{\rho_0 r_0} = \frac{L}{r_0}, \tag{7.3.4}$$

où p est la pression atmosphérique au sol et L est le facteur d'échelle de l'atmosphère, c'est-à-dire la hauteur qu'elle aurait si elle était homogène avec le poids spécifique ρ_0 et produisait au sol la même pression p. Ces paramètres α et β sont respectivement de l'ordre de 0.0003 et 0.001 25. Aussi, en développant la formule (7.3.2) et en ne conservant après intégration que les termes du second ordre par rapport à α et β (voir détails dans Danjon, 1953), on obtient la *formule de Laplace* :

$$R = \alpha\,(1-\beta)\tan z_0 - \alpha\,(\beta - \frac{\alpha}{2})\tan^3 z_0 \tag{7.3.5}$$

qu'on écrit généralement

$$R = \mathcal{A}\tan z_0 - \mathcal{B}\tan^3 z_0. \tag{7.3.6}$$

Les hypothèses qui ont été faites pour établir cette formule n'étant pas rigoureusement exactes, celle-ci n'est qu'approchée. Pour z_0 inférieur à 60°, cependant, les erreurs que l'on commet en l'appliquant ne dépassent pas $0''.002$, alors qu'elles atteignent $0''.01$ pour 67° et $0''.02$ pour 70°. Avec cette précision, on pourra utiliser la formule de Laplace avec les coefficients suivants déduits des tables de Poulkovo (1985)

$$R_0 = 57''.085\tan z_0 - 0''.0666\tan^3 z_0, \tag{7.3.7}$$

dans les conditions suivantes, dites *normales*,

$$\left.\begin{array}{llcl}
\text{Température} & : \; t_0 & = & 15°\text{C}\;(T_0 = 288.16\ \text{K}), \\
\text{Pression} & : \; p_0 & = & 101\,325\ \text{Pa}\,(760\ \text{torr}), \\
\text{Longueur d'onde} & : \; \lambda_0 & = & 0.590\ \mu\text{m}, \\
\text{Pression partielle de vapeur d'eau} & : \; f_0 & = & 0\ \text{Pa}.
\end{array}\right\} \tag{7.3.8}$$

Les valeurs de α et β correspondantes sont :

$$\alpha_0 = 0.000\,277\,117 = 57''.1595,$$
$$\beta_0 = 0.001\,3037.$$

On en déduit le facteur d'échelle de l'atmosphère $L_o = 8.3$ kilomètres.
La valeur de la réfraction pour $t = 0°\text{C}\,(T = 273.16\ \text{K})$ est :

$$60''.236\tan z_0 - 0''.0675\tan^3 z_0.$$

Pour avoir une meilleure précision à de fortes distances zénithales, on utilisera des tables de réfraction (*cf.* 7.3.2).

7.3.1.2. Dépendance vis à vis des paramètres physiques

La formule (7.3.5) dépend des quantités α et β qui elles-mêmes dépendent des conditions physiques, de la composition de l'air, en particulier de l'humidité, et de la longueur d'onde λ de la lumière.

Des études de laboratoire sur les variations de l'indice de réfraction de l'air montrent qu'avec une très bonne approximation, la réfractivité $n-1$ d'un gaz, corrigée des effets de température et de pression, s'exprime sous la forme du produit d'un facteur de dispersion ne dépendant que de λ, par un facteur qui est une fonction de la densité. Dans cette fonction les coefficients dépendent de la composition chimique de l'air et, en particulier, de la pression partielle de la vapeur d'eau. Cette dernière correction peut également être mise sous la forme d'un facteur correctif multiplicatif. Examinons successivement chacun de ces effets.

Température et pression

En première approximation, si on admet que la réfractivité est proportionnelle à la densité, on peut appliquer la loi de Boyle-Mariotte et obtenir :

$$\alpha_{t.p} = \alpha_0 \frac{p}{p_0} \frac{1 + mt_0}{1 + mt},$$

avec $m = 1/273.16$, t_0, α_0 et p_0 étant les conditions normales décrites ci-dessus.

Cependant, les mesures de réfractivité de l'air en laboratoire (Edlèn, 1966) montrent une dépendance un peu différente de ces paramètres. Il en est de même des tables de réfraction de Poulkovo. En se basant sur ces dernières, on trouve

$$\alpha = \alpha_0 \frac{p}{p_0} \frac{1.055\,2126\, A}{1 + 0.003\,680\,84\, t}, \tag{7.3.9}$$

où p est exprimé en pascals et t en degrés Celsius.

La quantité A est un facteur qui prend en compte une correction à la loi de dilatation des gaz sous l'effet de la température et le trajet du rayon lumineux dans l'atmosphère,

$$A = 1 - [0.003\,592\,(t - 15) - 0.000\,0055\,(t - 7.5)^2] f(z), \tag{7.3.10}$$

où $f(z)$ est donné par la table 7.3.1.

Table 7.3.1. Correction complémentaire de la réfraction atmosphérique dépendant de la température.

z	$< 35°$	$40°$	$45°$	$50°$	$55°$	$60°$	$65°$	$70°$
$10^4 f(z)$	0	2	6	12	21	34	56	97

Par ailleurs, le coefficient β dans la formule (7.3.4) est proportionnel à la pression et inversement proportionnel au poids spécifique ρ_0. Ce dernier étant aussi proportionnel à la pression, on a

$$\beta = \beta_0 \frac{1 + 0.003\,680\,84\, t}{1.055\,2126\, AB}, \tag{7.3.11}$$

où la quantité B est une correction analogue à A, mais dépendant de la pression. Elle devient importante pour des observatoires situés à haute altitude :

$$B = 1 + [0.9430 \times 10^{-5}(p - p_0) - 0.78 \times 10^{-10}(p - p_0)^2] g\,(z), \tag{7.3.12}$$

où $g(z)$ est donné par la table 7.3.2.

Table 7.3.2. Correction complémentaire de la réfraction atmosphérique dépendant de la pression.

z	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	65°	70°
$10^4 g(z)$	4	4	4	5	5	6	8	10	13

A et B sont très voisins de 1 et, pour z inférieur à 50°, ils peuvent généralement être pris égaux à 1. En combinant ces effets, et en supposant toujours que λ et f remplissent les conditions (7.3.8), on peut obtenir une formule donnant la réfraction $R_{t,p}$ avec une précision de $0''.01$ jusqu'à une distance zénithale de 60° et $0''.05$ jusqu'à 70° :

$$R_{t,p} = R_0 \frac{P}{P_0} \frac{1.055\,2126}{1 + 0.003\,680\,84\,t} AB. \tag{7.3.13}$$

Réfraction chromatique

La dépendance de l'indice de réfraction, donc de α, vis à vis de la longueur d'onde s'exprime par une fonction assez compliquée de l'inverse du carré de celle-ci (formule de Edlèn, 1966).

Cependant, les sources astronomiques ne sont pas monochromatiques et, même si on utilise des filtres, il subsiste une dispersion résiduelle qui déforme les images. Aussi, une formule représentant empiriquement le facteur de dispersion par un développement limité en $1/\lambda^2$ arrêté au second ordre est suffisante. On déduit des tables de Poulkovo l'expression suivante :

$$R_{t,p,\lambda} = R_{t,p} \left(0.982\,82 + \frac{0.005\,981}{\lambda^2} \right) = R_{t,p} F(\lambda), \tag{7.3.14}$$

où λ est exprimé en micromètres.

Humidité

L'indice de l'air dépend de sa composition chimique. Malgré les variations séculaires et périodiques de la pression partielle de dioxyde de carbone CO_2, on peut en négliger l'effet et utiliser toujours la formule (7.3.7) établie pour une concentration moyenne. Il n'en va pas de même pour la vapeur d'eau dont la proportion varie considérablement. Nous donnons ici la formule de Birch et Downs (1988) :

$$\alpha = \alpha_0 - f \left(3.7209 - \frac{0.0343}{\lambda^2} \right) 10^{-10},$$

où f est la pression partielle de vapeur d'eau en pascals. Toutefois, pour des observations astronomiques courantes, on peut négliger l'effet de couleur autre que celui qui est déjà pris en compte par (7.3.14). On peut se contenter d'utiliser la formule suivante, déduite des tables de Poulkovo :

$$R_{t,p,\lambda,f} = R_{t,p,\lambda}(1 - 0.152 \times 10^{-5} f - 0.55 \times 10^{-9} f^2) = R_{t,p,\lambda} G(f). \qquad (7.3.15)$$

Pour des pressions de vapeur faibles (inférieures à 500 pascals), on peut négliger le terme en f^2.

7.3.1.3. Évaluation de la réfraction pour des distances zénithales inférieures à 70°

Il est d'usage d'employer des tables pour calculer la réfraction à des distances zénithales inférieures à 70°. On peut ainsi utiliser les tables de Poulkovo qui sont actuellement les meilleures. Elles donnent, pour toutes les distances zénithales et un ensemble réaliste de conditions physiques, les logarithmes de la réfraction normale et des corrections permettant de faire le calcul. En pratique toutefois, on est limité par la connaissance des conditions physiques, en particulier dans les instruments. Pour cette raison, les tables ne donnent qu'une approximation et il est souhaitable de déterminer une correction à la réfraction calculée, chaque fois que c'est possible, en confrontant la distance zénithale observée et calculée des étoiles. Compte-tenu de cette incertitude, on peut remplacer la lecture des tables en programmant l'équation (7.3.7) corrigée par les formules (7.3.13), (7.3.14) et (7.3.15). La précision du résultat est inférieure à $0''.01$ pour z inférieur à 60° et à $0''.05$ pour z compris entre 60° et 70° et pour des conditions physiques non extrêmes.

7.3.2. Réfraction aux grandes distances zénithales

Pour des distances zénithales supérieures à 70°, les formules ci-dessus deviennent rapidement mauvaises. Les mesures de réfraction deviennent également plus incertaines et la précision des tables diminue. De nouveaux phénomènes physiques deviennent importants tels que l'effet de l'altitude sur l'intégrale des déviations de la lumière dans son trajet et l'effet de l'aplatissement de la Terre et de son atmosphère.

Nous donnons ci-après une méthode de calcul de la réfraction dans des conditions de faible hauteur au-dessus de l'horizon.

7.3.2.1. Réfraction normale

Comme ci-dessus, la réfraction normale correspond à des conditions moyennes,

Température	:	$t_0 =$ 15°C ($T_0 = 288.16$ K),
Pression	:	$p_0 =$ 101 325 Pa (760 torr),
Longueur d'onde	:	$\lambda_0 =$ 0.590 μm,
Pression de vapeur d'eau	:	$f_0 =$ 0 Pa,
Latitude du lieu	:	$\phi_0 =$ 45°,
Altitude	:	$h_0 =$ 0 m.

La formule de Laplace (7.3.7) n'est plus valable pour des distances zénithales supérieures à 70°. Pour obtenir la réfraction normale, on utilisera la table 7.3.3 : R_0 y est donnée de 10′ en 10′.

7.3.2.2. Corrections de température et pression

Pour obtenir la réfraction en fonction de la température et de la pression $R_{t,p}$, la formule (7.3.13) est toujours valable, mais les expressions approchées de A et de B données par les formules (7.3.10) et (7.3.12) ne peuvent plus être employées. Les tables 7.3.4 et 7.3.5 donnent A et B en fonction de la distance zénithale pour quatre valeurs de la température et de la pression, ce qui est suffisant pour permettre des interpolations. On peut d'ailleurs employer ces tables pour toutes les valeurs de z à la place des formules (7.3.10) et (7.3.12).

7.3.2.3. Correction de réfraction chromatique

La formule (7.3.14) est valable pour des distances zénithales inférieures à 84°. La table 7.3.6 donne le facteur C par lequel il faut multiplier le résultat donné par cette formule pour des distances zénithales de 85°, 88° et 90°, si bien que la réfraction corrigée de l'effet chromatique s'écrit :

$$R_{t,p,\lambda} = R_{t,p}\left(0.982\,82 + \frac{0.005\,981}{\lambda^2}\right) C. \tag{7.3.16}$$

7.3.2.4. Correction d'humidité

La correction d'humidité est donnée par la formule (7.3.15) avec une approximation suffisante pour une distance zénithale inférieure à 70°. Au-delà, il faut multiplier par le facteur correctif D, si bien que la réfraction corrigée de l'humidité s'écrit :

$$R_{t,p,\lambda,f} = R_{t,p,\lambda}(1 - 0.152 \times 10^{-5} f - 0.55 \times 10^{-9} f^2)\, D. \tag{7.3.17}$$

La quantité D est donnée dans la table 7.3.7.

7.3.2.5. Correction de latitude

L'hypothèse de la sphéricité des couches d'air n'étant pas valable pour de fortes distances zénithales, la forme locale de la surface de la Terre doit être prise en compte. Comme celle-ci est fonction de la latitude ϕ du lieu, il y a une correction multiplicative $(1 + E)$ à effectuer. Les valeurs de E sont données dans la table 7.3.8.

7.3.2.6. Correction d'altitude

Une correction d'altitude est également à appliquer pour le calcul de la réfraction au voisinage de l'horizon pour tenir compte d'une traversée prolongée des rayons dans la haute atmosphère. La table 7.3.9 la donne sous forme de facteur multiplicatif H qu'on doit appliquer pour des distances zénithales supérieures à 80° en fonction de l'altitude h en mètres.

Table 7.3.3. Réfraction normale pour des distances zénithales comprises entre 70° et 90°.

z		Réfraction		*z*		Réfraction		*z*		Réfraction	
°	′	′	″	°	′	′	″	°	′	′	″
70	0	2	35.471	77	0	4	2.081	84	0	8	16.924
70	10	2	36.866	77	10	4	5.200	84	10	8	29.003
70	20	2	38.281	77	20	4	8.393	84	20	8	41.615
70	30	2	39.720	77	30	4	11.669	84	30	8	54.823
70	40	2	41.183	77	40	4	15.023	84	40	9	8.668
70	50	2	42.667	77	50	4	18.458	84	50	9	23.171
71	0	2	44.176	78	0	4	21.987	85	0	9	38.389
71	10	2	45.710	78	10	4	25.601	85	10	9	54.388
71	20	2	47.271	78	20	4	29.315	85	20	10	11.195
71	30	2	48.857	78	30	4	33.124	85	30	10	28.883
71	40	2	50.471	78	40	4	37.032	85	40	10	47.530
71	50	2	52.112	78	50	4	41.048	85	50	11	7.191
72	0	2	53.780	79	0	4	45.174	86	0	11	27.939
72	10	2	55.477	79	10	4	49.421	86	10	11	49.888
72	20	2	57.203	79	20	4	53.778	86	20	12	13.095
72	30	2	58.962	79	30	4	58.270	86	30	12	37.687
72	40	3	0.755	79	40	5	2.887	86	40	13	3.791
72	50	3	2.574	79	50	5	7.638	86	50	13	31.503
73	0	3	4.434	80	0	5	12.529	87	0	14	0.969
73	10	3	6.320	80	10	5	17.570	87	10	14	32.348
73	20	3	8.248	80	20	5	22.768	87	20	15	5.816
73	30	3	10.209	80	30	5	28.133	87	30	15	41.564
73	40	3	12.207	80	40	5	33.657	87	40	16	19.783
73	50	3	14.245	80	50	5	39.367	87	50	17	0.704
74	0	3	16.322	81	0	5	45.255	88	0	17	44.388
74	10	3	18.440	81	10	5	51.342	88	10	18	31.783
74	20	3	20.600	81	20	5	57.635	88	20	19	22.519
74	30	3	22.801	81	30	6	4.133	88	30	20	17.223
74	40	3	25.050	81	40	6	10.869	88	40	21	16.292
74	50	3	27.343	81	50	6	17.833	88	50	22	20.170
75	0	3	29.681	82	0	6	25.053	89	0	23	29.419
75	10	3	32.070	82	10	6	32.527	89	10	24	44.568
75	20	3	34.511	82	20	6	40.286	89	20	26	6.318
75	30	3	37.005	82	30	6	48.329	89	30	27	35.427
75	40	3	39.548	82	40	6	56.677	89	40	29	12.790
75	50	3	42.152	82	50	7	5.353	89	50	30	59.345
76	0	3	44.807	83	0	7	14.380	90	0	32	57.971
76	10	3	47.525	83	10	7	23.762				
76	20	3	50.303	83	20	7	33.534				
76	30	3	53.147	83	30	7	43.703				
76	40	3	56.059	83	40	7	54.308				
76	50	3	59.034	83	50	8	5.376				

Table 7.3.4. Valeur du facteur correctif A dépendant de la température.

z	A				z	A			
° ′	$t = -30°$	$t = -10°$	$t = 10°$	$t = 30°$	° ′	$t = -30°$	$t = -10°$	$t = 10°$	$t = 30°$
0 0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	85 0	1.02328	1.01271	1.00250	0.99260
10 0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	85 10	1.02458	1.01341	1.00264	0.99219
20 0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	85 20	1.02598	1.01417	1.00279	0.99176
30 0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	85 30	1.02750	1.01499	1.00295	0.99129
40 0	1.00003	1.00002	1.00000	0.99999	85 40	1.02915	1.01588	1.00312	0.99078
45 0	1.00010	1.00005	1.00001	0.99997	85 50	1.03095	1.01686	1.00331	0.99022
50 0	1.00020	1.00011	1.00002	0.99994					
55 0	1.00036	1.00019	1.00004	0.99989	86 0	1.03290	1.01791	1.00352	0.98962
60 0	1.00058	1.00031	1.00006	0.99983	86 10	1.03504	1.01906	1.00374	0.98897
65 0	1.00096	1.00051	1.00010	0.99970	86 20	1.03738	1.02031	1.00398	0.98826
					86 30	1.03995	1.02168	1.00425	0.98748
70 0	1.00162	1.00088	1.00017	0.99949	86 40	1.04276	1.02319	1.00454	0.98664
71 0	1.00181	1.00099	1.00019	0.99942	86 50	1.04586	1.02485	1.00486	0.98571
72 0	1.00205	1.00111	1.00022	0.99935					
73 0	1.00232	1.00126	1.00025	0.99927	87 0	1.04930	1.02667	1.00521	0.98468
74 0	1.00263	1.00144	1.00028	0.99916	87 10	1.05310	1.02870	1.00560	0.98356
					87 20	1.05732	1.03094	1.00603	0.98232
75 0	1.00303	1.00165	1.00033	0.99904	87 30	1.06204	1.03343	1.00651	0.98094
76 0	1.00349	1.00191	1.00038	0.99888	87 40	1.06733	1.03621	1.00704	0.97942
77 0	1.00406	1.00222	1.00044	0.99870	87 50	1.07327	1.03932	1.00763	0.97772
78 0	1.00476	1.00260	1.00051	0.99847					
79 0	1.00565	1.00310	1.00061	0.99819	88 0	1.07996	1.04282	1.00829	0.97583
					88 10	1.08757	1.04677	1.00904	0.97372
80 0	1.00680	1.00372	1.00074	0.99781	88 20	1.09624	1.05124	1.00987	0.97134
80 30	1.00751	1.00411	1.00081	0.99759	88 30	1.10616	1.05633	1.01082	0.96867
81 0	1.00832	1.00455	1.00090	0.99733	88 40	1.11761	1.06216	1.01190	0.96565
81 30	1.00925	1.00506	1.00100	0.99703	88 50	1.13092	1.06886	1.01313	0.96223
82 0	1.01035	1.00566	1.00112	0.99668					
82 30	1.01163	1.00636	1.00126	0.99627	89 0	1.14647	1.07660	1.01454	0.95833
					89 10	1.16484	1.08563	1.01617	0.95388
83 0	1.01317	1.00720	1.00142	0.99579	89 20	1.18675	1.09623	1.01805	0.94878
83 30	1.01498	1.00820	1.00162	0.99520	89 30	1.21316	1.10876	1.02025	0.94289
84 0	1.01720	1.00941	1.00185	0.99450	89 40	1.24550	1.12374	1.02283	0.93609
84 30	1.01992	1.01088	1.00214	0.99365	89 50	1.28567	1.14184	1.02588	0.92814
85 0	1.02328	1.01271	1.00250	0.99260	90 0	1.37050	1.17963	1.03230	0.91170

7.3.2.7. Lever et coucher des astres

On détermine les instants de lever et de coucher d'un astre en calculant les instants où sa distance zénithale z en dehors de l'atmosphère est :

$$z = 90° + R(90°),$$

où $R(90°)$ est la valeur de la réfraction pour $z_0 = 90°$.

Les conditions atmosphériques à l'horizon étant très variables, les tables ci-dessus ne sont que

Table 7.3.5. Valeur du facteur correctif B dépendant de la pression exprimée en pascals.

z	B				z	B			
° ′	$p =$ 50000	$p =$ 70000	$p =$ 90000	$p =$ 110000	° ′	$p =$ 50000	$p =$ 70000	$p =$ 90000	$p =$ 110000
0 0	0.99979	0.99989	0.99995	1.00003	80 0	0.99781	0.99867	0.99951	1.00038
10 0	0.99979	0.99989	0.99995	1.00003	81 0	0.99739	0.99841	0.99942	1.00044
20 0	0.99979	0.99989	0.99995	1.00003	82 0	0.99683	0.99808	0.99930	1.00054
30 0	0.99979	0.99988	0.99995	1.00004	83 0	0.99612	0.99760	0.99914	1.00067
40 0	0.99979	0.99985	0.99994	1.00004	84 0	0.99500	0.99697	0.99890	1.00085
50 0	0.99972	0.99982	0.99993	1.00005	85 0	0.99359	0.99605	0.99857	1.00110
60 0	0.99958	0.99974	0.99991	1.00007	85 30	0.99261	0.99546	0.99835	1.00127
65 0	0.99951	0.99967	0.99988	1.00009	86 0	0.99142	0.99473	0.99808	1.00148
					86 30	0.98995	0.99381	0.99774	1.00174
70 0	0.99929	0.99956	0.99985	1.00012					
71 0	0.99922	0.99952	0.99983	1.00013	87 0	0.98807	0.99267	0.99733	1.00207
72 0	0.99915	0.99948	0.99981	1.00015	87 15	0.98695	0.99197	0.99707	1.00227
73 0	0.99908	0.99945	0.99980	1.00016	87 30	0.98570	0.99120	0.99679	1.00248
74 0	0.99901	0.99937	0.99977	1.00017	87 45	0.98430	0.99032	0.99646	1.00274
					88 0	0.98278	0.98937	0.99611	1.00302
75 0	0.99887	0.99930	0.99975	1.00019	88 15	0.98097	0.98824	0.99570	1.00334
76 0	0.99873	0.99922	0.99973	1.00021	88 30	0.97897	0.98696	0.99522	1.00371
77 0	0.99859	0.99915	0.99968	1.00025	88 45	0.97662	0.98553	0.99469	1.00414
78 0	0.99838	0.99900	0.99964	1.00028	89 0	0.97400	0.98390	0.99407	1.00463
79 0	0.99817	0.99885	0.99959	1.00032	89 15	0.97105	0.98197	0.99336	1.00519
80 0	0.99781	0.99867	0.99951	1.00038	89 30	0.96755	0.97979	0.99255	1.00584
					89 45	0.96360	0.97730	0.99160	1.00660
					90 0	0.95925	0.97452	0.99061	1.00785

des approximations de la réalité. Dans les conditions normales présentées en 7.3.2.1, on trouve :

$$R(90°,\ t = 15°\ \mathrm{C}) = 32'57'' = 32'.95.$$

Les éphémérides donnent d'habitude les instants de lever et de coucher pour une réfraction calculée à la température 0° C. On a dans ces conditions :

$$R(90°,\ t = 0°\ \mathrm{C}) = 38'20'' = 38'.33.$$

Dans les éphémérides astronomiques (*Annuaire du Bureau des longitudes*) utilisant les tables de Radau, on utilise 36′.60, ce qui est voisin, compte tenu des tables modernes présentées ici, d'une réfraction ramenée à une température de 5°.1 C.

Table 7.3.6. Valeur du facteur correctif C dépendant de la longueur d'onde λ exprimée en nanomètres.

λ	C			λ	C		
nm	$z = 85°$	$z = 88°$	$z = 90°$	nm	$z = 85°$	$z = 88°$	$z = 90°$
400	1.00025	1.00071	1.00168	560	1.00002	1.00003	1.00023
420	1.00021	1.00058	1.00143	580	1.00000	1.00001	1.00007
440	1.00018	1.00048	1.00110	600	0.99999	0.99998	0.99995
460	1.00014	1.00039	1.00092	620	0.99998	0.99996	0.99988
480	1.00011	1.00030	1.00074	640	0.99997	0.99992	0.99982
500	1.00008	1.00023	1.00058	660	0.99997	0.99988	0.99977
520	1.00005	1.00016	1.00046	680	0.99996	0.99986	0.99962
540	1.00003	1.00010	1.00032	700	0.99995	0.99984	0.99968

Table 7.3.7. Valeur du facteur correctif D dépendant de l'humidité f exprimée en pascals.

f	D				
Pa	$z = 70°$	$z = 80°$	$z = 85°$	$z = 88°$	$z = 90°$
0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
200	1.00000	1.99999	0.99997	1.99989	0.99959
400	1.00000	0.99998	0.99994	0.99975	0.99906
600	0.99999	0.99996	0.99987	0.99959	0.99843
800	0.99999	0.99994	0.99982	0.99942	0.99774
1000	0.99998	0.99992	0.99976	0.99922	0.99675
1200	0.99998	0.99991	0.99970	0.99901	0.99588
1400	0.99997	0.99989	0.99965	0.99878	0.99491
1600	0.99997	0.99988	0.99958	0.99855	0.99383
1800	0.99996	0.99986	0.99950	0.99825	0.99254
2000	0.99996	0.99985	0.99941	0.99797	0.99125
2200	0.99995	0.99981	0.99931	0.99765	0.98989
2400	0.99995	0.99978	0.99922	0.99731	0.98830
2600	0.99994	0.99975	0.99912	0.99696	0.98662
2800	0.99994	0.99971	0.99901	0.99659	0.98487
3000	0.99993	0.99967	0.99889	0.99618	0.98308
3200	0.99992	0.99964	0.99878	0.99576	0.98110
3400	0.99991	0.99960	0.99866	0.99533	0.97905
3600	0.99990	0.99956	0.99854	0.99487	0.97686

Table 7.3.8. Valeur du terme E du facteur correctif $(1+E)$ dépendant de la latitude ϕ de l'observateur.

ϕ	$10^5\,E$								
°	$z = 70°$	$z = 80°$	$z = 82°$	$z = 84°$	$z = 86°$	$z = 87°$	$z = 88°$	$z = 89°$	$z = 90°$
0°	−6	−23	−32	−53	−90	−124	−175	−255	−400
10°	−5	−21	−30	−48	−85	−115	−163	−240	−378
20°	−4	−16	−25	−39	−69	−94	−132	−195	−313
30°	−2	−11	−18	−25	−46	−62	−88	−129	−210
40°	0	−2	−5	−9	−16	−22	−32	−48	−87
50°	0	2	4	7	13	19	25	37	58
60°	2	9	14	23	41	58	83	120	182
70°	4	16	23	37	65	90	129	186	283

Table 7.3.9. Valeur du facteur multiplicatif H dépendant de l'altitude h de l'observateur, exprimée en mètres.

h	H			
m	$z = 80°$	$z = 85°$	$z = 88°$	$z = 90°$
0	1.00000	1.00000	1.00000	1.0000
500	0.99998	0.99952	0.99608	0.9727
1000	0.99996	0.99905	0.99218	0.9460
1500	0.99994	0.99857	0.98835	0.9198
2000	0.99992	0.99815	0.98453	0.8942
2500	0.99990	0.99772	0.98083	0.8693
3000	0.99988	0.99730	0.97720	0.8449
3500	0.99986	0.99688	0.97368	0.8209
4000	0.99984	0.99651	0.97023	0.7979
4500	0.99983	0.99619	0.96700	0.7751
5000	0.99981	0.99587	0.96387	0.7532

Pour calculer les instants de lever et de coucher du Soleil ou de la Lune, on ajoutera à $R\,(90°,\ t)$ le rayon apparent de ces astres qui, dans les éphémérides, est pris conventionnellement égal à $16'$ pour ces deux astres.

L'angle horaire H du lever ou du coucher d'un astre de déclinaison δ en un lieu de latitude ϕ est donné par :

$$\cos H = \frac{-\sin\ R\,(90°,\ t) - \sin\phi\sin\delta}{\cos\phi\cos\delta}\cdot \tag{7.3.18}$$

7.3.2.8. Réfraction à une distance finie

Pour les observations précises de la direction d'un point sur la Lune et a fortiori d'un satellite artificiel, on ne peut plus, dans la théorie de la réfraction, supposer que la direction vraie est parallèle à l'asymptote du rayon lumineux.

La façon la plus simple d'effectuer cette correction consiste, d'après Danjon (1953), à calculer la parallaxe (*cf.* 7.2), non pour le point d'observation O, mais pour un point fictif O′ situé au-dessus de O et tel que :

$$\mathrm{OO}' = r_0\left(\alpha - R\cot z + \frac{R^2}{2}\right), \tag{7.3.19}$$

où α est la réfractivité de l'air au lieu de l'observation, r_0 le rayon terrestre et R la réfraction calculée pour la distance zénithale z d'observation de l'objet. Cette formule n'est cependant valable que si cet objet est à l'extérieur de l'atmosphère.

7.3.3. Effet de la réfraction sur les mesures de distance

Les déterminations de distances à l'aide de télémètres laser sont obtenues en mesurant le temps d'aller et retour de photons émis au sol et réfléchis par un satellite situé en un point A. La vitesse de la lumière dans un milieu d'indice de réfraction n est c/n, où c est la vitesse de la lumière dans le vide. On appelle *réfraction en distance* la différence entre la distance calculée en prenant pour vitesse c et la distance réelle :

$$\Delta D = \int_0^A (n\,(s) - 1)\mathrm{d}s.$$

En première approximation, on considérera une atmosphère composée de couches planes horizontales d'altitude h, en négligeant la courbure des rayons lumineux et en supposant que le satellite est au-dessus de l'atmosphère. On a

$$\mathrm{d}h = \mathrm{d}s\cos z,$$

d'où

$$\Delta D = \frac{1}{\cos z}\int_0^\infty (n\,(h) - 1)\mathrm{d}h.$$

Or, d'après la formule (7.3.3),

$$n - 1 = \alpha\frac{\rho}{\rho_0}$$

et, en introduisant la définition de β donnée par la formule (7.3.4), on a, en définitive

$$\Delta D = \frac{\alpha\beta r_0}{\cos z} = \frac{\alpha L}{\cos z}. \tag{7.3.20}$$

Dans cette formule, la dépendance de β vis à vis des conditions initiales est donnée par (7.3.11) et celle de α par (7.3.9). Elle doit être, de plus, corrigée des effets d'humidité au moyen du facteur $G(f)$ de la formule (7.3.15) et de la longueur d'onde. En ce qui concerne la correction due à la longueur d'onde, on ne peut plus faire les hypothèses simplificatrices justifiées par la largeur de bande dans les observations optiques. Les observations de distances par laser se font en lumière monochromatique de longueur d'onde λ. On prendra donc, pour représenter l'effet chromatique, au lieu du facteur F de la formule (7.3.14), le facteur $F'(\lambda)$ suivant :

$$F'(\lambda) = 0.9967 + \frac{0.018\,24}{\lambda^2} - \frac{0.000\,0264}{\lambda^4}. \tag{7.3.21}$$

On constate que, dans le produit $\alpha\beta$, les termes de température s'éliminent et il reste

$$\Delta D = \frac{p}{p_0 B}\frac{\alpha_0\beta_0 r_0}{\cos z}\,F'(\lambda)\,G(f), \tag{7.3.22}$$

où l'on prendra pour r_0, le rayon de la Terre à la latitude de l'observatoire.

Il faut signaler l'existence d'une formule empirique due à Marini et Murray (1973) qui est adoptée par les standards du Service international de la rotation de la Terre (International Earth Rotation Service, IERS, 1992). Elle est la suivante

$$\Delta D = \frac{\Phi(\lambda)}{\Psi(\phi,\,h)}\;\frac{A+B}{\cos z + \dfrac{B/(A+B)}{\cos z + 0.01}},$$

avec

$$\begin{aligned} A &= 0.000\,023\,57\;p + 0.000\,001\,41\;f,\\ B &= (1.084\times 10^{-10})\,pTK + (4.734\times 10^{-12})\,\frac{p^2}{T}\frac{2}{(3-1/K)}\ , \end{aligned}$$

où on a noté :

$$\begin{aligned} T &= t + 273.16,\\ K &= 1.163 - 0.009\,68\cos 2\phi - 0.001\,04\;T + 0.000\,000\,1435\;p,\\ \Phi\,(\lambda) &= 0.9650 + \frac{0.0164}{\lambda^2} + \frac{0.000\,228}{\lambda^4},\\ \Psi\,(\phi,h) &= 1 - 0.0026\cos 2\phi - 0.000\,31\;h. \end{aligned}$$

Dans ces formules, ΔD est exprimé en mètres, p et f sont exprimés en pascals, λ en micromètres et la hauteur h en kilomètres.

Notons que la formule (7.3.22), issue d'une théorie cohérente avec celle de la réfraction en distance zénithale, donne les même résultats pour des longueurs d'onde comprises entre 0.5 et 1.1 μm, les distances zénithales inférieures à 60° et toutes les conditions usuelles d'observation avec une différence moyenne de 5 mm, et un maximum inférieur à 9 mm. Ces nombres sont respectivement de 12 mm et 36 mm pour des distances zénithales de 60° et 70°.

7.3.4. Réfraction dans le domaine des ondes radio

Dans le domaine des ondes radio, deux phénomènes se superposent qui ont chacun pour effet de modifier la vitesse des ondes dans le milieu qu'elles traversent. L'un est analogue à celui qui a été présenté dans le domaine optique : la troposphère a un indice de réfraction non négligeable dont il faut tenir compte pour décrire le comportement des ondes radio qui la traversent. L'autre est dû à la variation de la vitesse des ondes lorsqu'elles traversent un plasma. Ce second effet est important par suite de l'existence de plusieurs couches ionisées dans la haute atmosphère, essentiellement dans l'ionosphère.

7.3.4.1. Réfraction troposphérique

Les diamètres des radio-télescopes, exprimés en longueurs d'onde, sont très faibles en comparaison avec les instruments optiques. La précision angulaire des visées est donc très faible. Aussi, la réfraction proprement dite n'a pas besoin d'être déterminée avec une grande précision. La formule empirique suivante, due à Smith et Weintraub (1955), donne l'indice de réfraction de l'air avec une précision suffisante :

$$\alpha_R = \frac{0.2840 \times 10^{-8} p}{1 + 0.003\,66\, t} - \frac{0.469 \times 10^{-9} f}{1 + 0.003\,66\, t} + \frac{0.508 \times 10^{-7} f}{(1 + 0.003\,66\, t)^2} = \alpha_S + \alpha_H. \tag{7.3.23}$$

Dans ces formules, la pression p et la pression partielle de vapeur d'eau f sont exprimées en pascals et t en degrés Celsius. On y a séparé la *composante sèche* α_S (le premier terme) et la *composante humide* α_H (les deux derniers termes) de l'indice de réfraction.

Dans les conditions normales, $t = 15°\mathrm{C}$, $p = 101\,325$ Pa, $f = 0$, on a

$$\alpha_{S,0} = 0.000\,2729, \qquad \text{ou} \qquad 56''.29.$$

La composante sèche est pratiquement indépendante de la fréquence jusqu'à 30 GHz et sa variation est inférieure à 1% jusqu'à 100 GHz. La formule générale de la réfraction en ondes radio est ainsi :

$$R = \mathcal{A}_R \tan z_0 - \mathcal{B}_R \tan^3 z_0,$$

avec

$$\mathcal{A}_R = \alpha_R \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_R = 0''.067.$$

Les mesures de précision en radio-astronomie (interférométrie à longue base, chronométrage des pulsars) ne sont pas des mesures angulaires directes, mais des mesures de temps. Il s'ensuit que l'effet important de la réfraction est le retard sur l'arrivée des ondes, équivalent pour les ondes radio de la correction aux mesures de distance présentée au paragraphe 7.3.3.

7.3.4.2. Retard dû à la troposphère

En ce qui concerne la composante sèche, les calculs du paragraphe 7.3.3 peuvent être repris intégralement. On a donc, d'après la formule (7.3.20), une augmentation apparente de la distance parcourue égale à :

$$\Delta D_S = \frac{r_0 \alpha_S \beta}{\cos z}. \tag{7.3.24}$$

La réfraction en distance due à la composante humide n'est pas prévisible de la même manière, la distribution de la vapeur d'eau en altitude étant généralement inhomogène. Cependant, en moyenne, on peut considérer que l'effet de l'humidité est celui que produit une couche de vapeur d'eau de pression au sol f et de facteur d'échelle L_H égal à 2 200 m dans les conditions normales de température. On a alors, par la formule (7.3.20)

$$\Delta D_H = \frac{\alpha_H L_H}{\cos z}. \tag{7.3.25}$$

Bien entendu, dans les formules 7.3.24 et 7.3.25, les quantités α_S, α_H, sont des fonctions de la température et de la pression dont il faudra corriger les effets comme indiqué dans la formule (7.3.23), alors que β, donc L_H, dépendent de la pression conformément à la formule (7.3.11).

7.3.4.3. Réfraction ionosphérique

La vitesse des ondes radio traversant un milieu ionisé est modifiée d'une manière que l'on peut par analogie assimiler à celle qui résulte de la traversée d'un milieu transparent par la lumière. On a

$$V = c\sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}} = cn,$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide, f est la fréquence de l'onde radio et f_p la fréquence propre du plasma traversé, elle-même donnée par

$$f_p = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e},$$

où N est la densité électronique du plasma exprimée en m^{-3}, e et m_e sont la charge et la masse de l'électron et ε_0 est la permittivité du vide. Les fréquences sont exprimées en hertz.

L'effet principal considéré en radio astronomie est le retard Δt, exprimé en secondes, de l'arrivée des ondes par rapport à un trajet dans le vide. Si L est la distance de l'objet observé, on déduit avec une bonne approximation (basée sur le fait que f_p est beaucoup plus petit que f) :

$$\Delta t = \frac{e^2}{8\pi^2 c\, \varepsilon_0 m_e} \frac{1}{f^2} \int_0^L N(l) \mathrm{d}l.$$

L'intégrale, que l'on notera N_T, est le contenu électronique total. L'expression pour la réfraction en distance exprimée en mètres, est

$$\Delta D_R = c\Delta t = 40.308 \frac{N_T}{f^2}.$$

En général, N_T est inconnu. On le détermine en mesurant la différence entre les délais à deux fréquences différentes f_1 et f_2. On a alors

$$40.308\, N_T = f_1^2 f_2^2 \frac{\Delta D_{R2} - \Delta D_{R1}}{f_1^2 - f_2^2}.$$

Lorsque le délai est produit par l'ionosphère seule, il dépend de la distance zénithale par la formule suivante qui tient compte de la courbure de l'ionosphère qu'on suppose toutefois être homogène :

$$\Delta D_R = \frac{\Delta D_R^0}{\cos\left(\arcsin\left[\dfrac{r_0 \sin z}{r_0 + h}\right]\right)},$$

où h est l'altitude moyenne de l'ionosphère, r_0 le rayon terrestre et ΔD_R^0 le délai au zénith. Lorsqu'on observe des objets en dehors du système solaire, le retard dû au plasma interstellaire est à ajouter à l'effet ionosphérique.

7.4. BIBLIOGRAPHIE

Birch, K.P., Downs, M.J. : 1988, The results of a comparison between calculated and measured values of the refractive index of air, *J. Phys. E Scient. Instrum.* **21**, 694.

Brumberg, V.A. : 1991, *Essential relativistic celestial mechanics*, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New-York.

Danjon, A. : 1953, *Astronomie générale*, Sennac éd., Paris, réédité en 1980, Blanchard éd.

Delambre, J.-B. : 1821, *Histoire de l'astronomie moderne*, vol. **2**, réédition de 1969, Johnson Reprint Corp., New-York.

Edlén, B. : 1966, The refractive index of air, *Metrologia* **2**, 71.

Hoskin, M. : 1978, The principal consequences of the discovery of the finite velocity of light for the development of astronomy in the eighteenth and nineteenth centuries, in *Roemer et la vitesse de la lumière*, R. Taton éd., Vrin, Paris.

IERS : 1992, IERS standards (1992), *IERS Technical note* **13**, D.D. McCarthy ed., observatoire de Paris.

Kaplan, G.H., Hughes, J.A., Seidelmann, P.K., Smith, C.A., Yallop, B.D. : 1989, Mean and apparent place computations in the new IAU system. III. Apparent, topocentric and astrometric places of planets and stars, *Astron. J.* **97**, 1197.

Marini, J.W., Murray, C.W. : 1973, Correction of laser range tracking data for atmospheric refraction at elevations above 10 degrees, *NASA publ.*, GSFC X-591-73-351.

Poulkovo (tables de réfraction de) : 1985, observatoire astronomique principal de l'Académie des sciences d'URSS, Poulkovo, éditions Naouka, section de Léningrad.

Smith, E.K.Jr., Weintraub, S. : 1955, The constants in the equation for atmospheric refraction index at radio-frequencies, *Proceedings of Institute of Radio Engineers* **41**, 1035.

Woolard, E.W., Clemence, G.M. : 1966, *Spherical astronomy*, Academic Press, New-York.