CHAPITRE **8**

MOUVEMENT DES CORPS DU SYSTÈME SOLAIRE

8.1. THÉORIES PLANÉTAIRES

8.1.1. Historique

De la création de la Connaissance des Temps à la fin du dix-huitième siècle

Le premier volume de la *Connaissance des Temps* dû à Dalencé qui en eut le privilège et à Picard qui en effectua les calculs parut en 1679. À l'époque, la *Connaissance des Temps* se bornait à annoncer aux astronomes les principaux phénomènes et à leur fournir les calculs nécessaires aux réductions de leurs observations journalières. On y trouvait les levers et couchers du Soleil, de la Lune et des cinq planètes connues, Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne, leurs passages au méridien de Paris, leurs longitudes, leurs latitudes et leurs déclinaisons.

Parmi les astronomes qui se chargèrent de la *Connaissance des Temps* jusqu'à ce qu'elle fut confiée au Bureau des longitudes en 1795, il faut citer Lalande qui en eut la responsabilité de 1760 à 1775. Lalande effectua ses calculs à partir des meilleures tables de l'époque : tables de l'abbé de La Caille pour le Soleil, tables de Halley pour les planètes. Comme pour la Lune (*cf.* 8.2.1) ces tables sont construites par ajustement à l'observation d'un petit nombre de termes donnés par la théorie. Ainsi, par exemple, les tables du Soleil de La Caille contiennent des inégalités de la Terre déterminées par Clairaut. Lalande construisit ensuite ses propres tables du Soleil et des planètes qui servirent de base aux éphémérides publiées dans la *Connaissance des Temps* jusqu'en 1808.

Lalande introduisit également dans la *Connaissance des Temps* une coordonnée supplémentaire, la distance de l'équinoxe au Soleil, c'est-à-dire le complément à vingt-quatre heures de l'ascension droite du Soleil. À son époque la *Connaissance des Temps* présente les éphémérides des astres par mois. Les éphémérides du Soleil sont publiées de jour en jour, celles des planètes de six jours en six jours. L'argument des éphémérides est le temps solaire vrai de Paris.

Les travaux de Laplace

Au cours des années 1770-1825, Laplace étudie les conséquences de l'application de la loi de la gravitation de Newton sur le mouvement des corps du système solaire et résout plusieurs problèmes concernant les théories planétaires. Il énonce, le premier, le théorème de l'invariabilité des grands axes, étudie la stabilité du système solaire, donne le développement de la fonction perturbatrice (*cf.* 8.1.3.2) à l'ordre 3 puis 5 des excentricités et inclinaisons ainsi que des formules permettant de calculer les perturbations planétaires.

Il donne aussi, en 1785, une formulation remarquable de la *grande inégalité* Jupiter-Saturne. Les astronomes étaient depuis longtemps intrigués par les irrégularités des moyens mouvements de Jupiter et Saturne montrées par l'observation. S'appuyant sur ses travaux et ceux de Lagrange et Poisson sur l'invariabilité des grands axes et des moyens mouvements, Laplace fait l'hypothèse que ces irrégularités sont dues à des termes périodiques de période de l'ordre de plusieurs centaines d'années. Il déduit des observations la quasi commensurabilité des moyens mouvements des deux planètes dans le rapport 2/5 et montre que les variations de ces moyens mouvements sont dues à des termes périodiques qui ont pour argument $2\lambda_J - 5\lambda_S$ (où λ_J et λ_S désignent les longitudes moyennes de Jupiter et Saturne). Il évalue (Laplace, 1785) à 919 ans la période de cette grande inégalité et à $1249''$ et $2924''$ les amplitudes correspondantes dans les longitudes de Jupiter et Saturne, respectivement. Les valeurs données par les théories planétaires modernes sont 935 ans pour la période de la grande inégalité et $1183''$ et $2912''$ pour les amplitudes correspondantes des perturbations sur les longitudes moyennes des deux planètes.

Les tables issues des travaux de Laplace

La plupart des tables du Soleil et des planètes utilisées dans la *Connaissance des Temps* durant la première moitié du dix-neuvième siècle sont issues des travaux de Laplace comme le montre la table 8.1.1 qui donne les sources et l'argument des éphémérides du Soleil et des planètes publiées dans la *Connaissance des Temps* depuis 1809. C'est le cas des tables du Soleil de Delambre publiées en 1806, des tables de Mercure, Vénus et Mars de Lindenau et des tables de Jupiter et Saturne de Bouvard publiées en 1808 puis en 1821 après que Laplace eut corrigé une erreur de signe dans les termes du cinquième ordre en excentricité de la grande inégalité.

Bouvard publia également en 1821 des tables d'Uranus. Pour construire ses tables il disposait de quarante années d'observations méridiennes régulières, de 1781, année de la découverte d'Uranus par Herschel, à 1820 et d'une vingtaine d'observations anciennes échelonnées entre 1690 et 1771, effectuées par Flamsteed, Bradley, Mayer et Lemonnier qui avaient pris la planète pour une étoile fixe. Bouvard construisit ses tables en partant des expressions analytiques données par Laplace (1800) pour les perturbations d'Uranus par Jupiter et Saturne. Il ne put représenter par les mêmes formules les anciennes observations et les modernes et décida de rejeter les observations anciennes et de baser ses tables uniquement sur les observations méridiennes. Malgré cela, ses tables ne tardèrent pas à montrer un écart croissant avec les observations ultérieures.

La représentation du mouvement du Soleil et des planètes dans la *Connaissance des Temps* subit, lors de la première moitié du dix-neuvième siècle, des modifications d'un autre ordre. À partir de 1835, le temps solaire moyen de Paris remplace le temps solaire vrai de Paris comme argument des éphémérides. À partir de 1838, les éphémérides sont publiées corps par corps. Elles sont journalières pour le Soleil, de trois jours en trois jours pour Mercure, de six jours en six jours pour Vénus et Mars, de huit jours en huit jours pour Jupiter, de dix jours en dix jours pour Saturne et de quinze jours en quinze jours pour Uranus. D'autres coordonnées sont introduites : latitude du Soleil, temps sidéral au midi moyen, rayon vecteur des planètes. En 1863, les éphémérides deviennent journalières pour Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne et de quatre jours en quatre jours pour Uranus et Neptune.

La découverte de Neptune

En 1845, les écarts entre les positions d'Uranus données par les tables de Bouvard et celles données par l'observation atteignent $2'$. À la demande d'Arago, Le Verrier s'attaque au problème. Il calcule les perturbations d'Uranus par Jupiter et Saturne au deuxième ordre des masses (*cf.* 8.1.3.1) et apporte des corrections aux tables de Bouvard de l'ordre de $40''$ sur les longitudes d'Uranus. Il compare ensuite sa théorie aux observations et améliore les constantes d'intégration. Il ramène ainsi les écarts entre la théorie et les observations méridiennes d'Uranus à $20''$ ce qui reste néanmoins trop important. Le Verrier recherche alors les perturbations qu'apporterait sur Uranus une planète située à peu près dans le plan de l'écliptique et, en première approximation, à une distance moyenne du Soleil double de celle d'Uranus (d'après la loi empirique de Bode). Il arrive à ramener les résidus en longitude entre théorie et observations à moins de $5''.4$ pour les observations méridiennes et moins de $20''$ pour les observations anciennes, avec une planète perturbatrice de demi-grand axe 36.1539 ua et de masse 0.000 107 masse solaire. Il estime, pour le 1 janvier 1847, la longitude héliocentrique de la planète perturbatrice à $326°32'$ et le rayon vecteur à 33.06 ua. Le Verrier communique, le 18 septembre 1846, la position de la planète à l'astronome allemand Galle qui l'observe à $52'$ de la position prévue par Le Verrier, le 23 septembre 1846. On sait que l'astronome anglais Adams avait résolu le problème en même temps que Le Verrier mais ses résultats furent publiés après la découverte de la planète. La position calculée par Adams différait de celle observée par Galle de $2°27'$ (Tisserand, 1889).

Des premières observations de Neptune et d'une observation ancienne de Lalande qui avait pris la planète pour une étoile fixe en 1795, on put déduire les éléments elliptiques de son orbite. On put aussi calculer la masse de la planète en partant des observations de son satellite Triton découvert en 1846 par Lassell, peu après la planète (voir 8.8.1). Les résultats de ces observations différaient sensiblement des valeurs prévues par Le Verrier et Adams comme le montre la table 8.1.2 empruntée à Tisserand (1889).

Tisserand remarque que la période des observations méridiennes correspond à un intervalle de temps où les perturbations mutuelles d'Uranus et Neptune sont sensibles. Il montre que les forces perturbatrices calculées par Le Verrier ont des directions voisines des directions réelles, que les valeurs adoptées pour l'excentricité et le demi-grand axe rendraient leur intensité trop faible mais que cela est compensé en partie par la valeur trop forte de la masse de Neptune, ce qui a permis à Le Verrier et à Adams de représenter correctement le lieu héliocentrique de Neptune.

Table 8.1.1. Sources et argument des éphémérides du Soleil et des planètes publiées dans la *Connaissance des Temps* depuis 1809.

Intervalle de temps	Argument des éphémérides	Sources des éphémérides de : Soleil, Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune
1809–1834	temps vrai de Paris	Delambre(1) (← Lalande(1) →) (← Delambre(1) →)
1835–1862	temps moyen de Paris	Delambre(1) (← Lindenau(1) →) (← Bouvard(1) →)
1863	"	Delambre(1) /Mathieu (← Lindenau(1) →) (← Bouvard(1) →) Kowalski
1864	"	(← Le Verrier →) (← Lindenau(1) →) (← Bouvard(1) →) Kowalski
1865–1870	"	(← Le Verrier →) (← Bouvard(1) →) Kowalski
1870–1876	"	(← Le Verrier →) (← Bouvard(1) →) Newcomb
1877–1878	"	(← Le Verrier →) (← Bouvard(1) →) (← Newcomb →)
1879–1883	"	(← Le Verrier →) (← Newcomb →)
1884–1911	"	(← Le Verrier →)
1912–1915	"	(← Le Verrier →) (← Gaillot →)
1916–1917	temps moyen de Greenwich	(← Le Verrier →) (← Gaillot →)
1918–1924	"	(← Le Verrier →) (← Gaillot →)
1925–1983	temps uniforme de Le Verrier(2)	(← Le Verrier →) (← Gaillot →)
1984–	TT(3)	(← VSOP82 →) (← VSOP82/TOP82 →)

(1) Tables issues des travaux de Laplace
(2) Assimilé au TU jusqu'en 1961, en réalité proche du TE
(3) Appelé TDT jusqu'en 1991

Table 8.1.2. Comparaison entre les éléments elliptiques et la masse de Neptune issus des premières observations et les valeurs prévues par Le Verrier et Adams (d'après Tisserand, 1889).

	Observations	Le Verrier	Adams
demi-grand axe	30.0367	36.1539	37.2474
excentricité	0.008 719	0.107 610	0.120 615
longitude du périhélie	47°12′	284°6′	299°11′
masse (en masse solaire)	0.000 056	0.000 107	0.000 150

Les tables de Le Verrier, Newcomb, Gaillot

Après ce coup de maître, Le Verrier reprend complètement le problème du mouvement du Soleil et des planètes principales et construit les théories et les tables de ces corps. Gaillot, collaborateur de Le Verrier, améliorera ensuite les théories des quatre grosses planètes Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. À peu près à la même époque, les travaux théoriques de Hansen donnent naissance à la théorie de Neptune de l'astronome russe Kowalski et, surtout, à la théorie globale des planètes de Newcomb. Les théories de Le Verrier, Gaillot et Newcomb sont décrites plus en détail au paragraphe 8.1.4.2. Les tables de Le Verrier et Gaillot ont été utilisées dans la *Connaissance des Temps* jusqu'en 1984 mais on peut constater, en examinant la table 8.1.1, que les tables de Kowalski puis celles de Newcomb ont été les sources des éphémérides de Neptune publiées dans la *Connaissance des Temps* de 1863 à 1883. Il est amusant de noter que si les tables du mouvement de Neptune ne sont introduites dans la *Connaissance des Temps* qu'en 1863 c'est pour des raisons ... budgétaires (réponse donnée par Mathieu, en 1860, à des critiques virulentes de Le Verrier sur la *Connaissance des Temps*, citée par Bigourdan, 1932). Pour Uranus, les tables de Newcomb ont été utilisées de 1877 à 1883.

À l'époque de Le Verrier et Gaillot, la *Connaissance des Temps* va peu à peu acquérir une forme qu'elle conservera jusqu'en 1979. En 1877 les coordonnées rectangulaires du Soleil sont introduites et les éphémérides d'Uranus et Neptune deviennent journalières. Les *éléments moyens* (*cf.* 8.1.5) des huit planètes principales, d'après Le Verrier et Gaillot, et ceux des planètes telluriques d'après Newcomb sont introduits en 1914 (Newcomb corrigé par Ross, pour Mars, à partir de 1920). L'argument des éphémérides du Soleil et des planètes devient le temps solaire moyen de Greenwich en 1916 puis le temps universel TU (c'est-à-dire le temps solaire moyen de Greenwich + 12 h, *cf.* 3.3) en 1925. D'une manière plus précise cet argument est le temps uniforme de Le Verrier tiré de la théorie du Soleil de Le Verrier. Il est, en fait, très proche du temps des éphémérides TE (*cf.* 3.6).

La Connaissance des Temps depuis 1980

D'importantes transformations ont été apportées à la *Connaissance des Temps* ces dernières années. En 1980, la présentation des éphémérides sous forme de tables interpolables a été remplacée par une représentation en polynômes de Tchebychev (*cf.* 9.1.3) beaucoup plus compacte et bien adaptée au développement de la micro-informatique.

Depuis 1984, la *Connaissance des Temps* utilise les théories du mouvement du Soleil, de la Lune et des planètes élaborées au Bureau des longitudes. Pour le Soleil et les planètes il s'agit des théories VSOP82 (Bretagnon, 1982) et TOP82 (Simon, 1983) ajustées sur l'intégration numérique du JPL DE200 (Standish et al., 1981). Ces théories et cette intégration numérique sont décrites aux paragraphes 8.1.4.3 et 8.2.3. Enfin, depuis 1984 également, l'argument des éphémérides est le temps terrestre TT (appelé temps dynamique terrestre TDT jusqu'en 1991, *cf.* 3.7).

8.1.2. Éléments de mécanique céleste

8.1.2.1. Remarques générales sur les théories planétaires

Le mouvement des planètes autour du Soleil est un cas particulier du problème des N corps. Tous les corps s'attirent les uns les autres conformément à la loi de la gravitation mais on considère que les planètes ont une masse faible devant celle du corps central, le Soleil. On recherche des solutions approchées du problème, valables sur un intervalle de temps limité, où les coordonnées sont des fonctions du temps t, des masses des corps en présence et des constantes d'intégration. On obtient ces solutions en construisant des *théories analytiques* ou *semi-analytiques* ou en effectuant des *intégrations numériques.*

Les théories analytiques et *semi-analytiques.*

Les coordonnées sont obtenues sous forme de combinaisons de fonctions algébriques et trigonométriques analytiques du temps t et des paramètres du problème, masses et constantes d'intégration. Les théories sont dites semi-analytiques lorsqu'on donne, avant intégration, des valeurs numériques à certains paramètres.

Les intégrations numériques.

Les intégrations numériques donnent les valeurs numériques des coordonnées et des vitesses pour des valeurs t_0, $t_0 + h$, $t_0 + 2h$, etc., t_0 étant le temps initial et h étant le pas d'intégration. Les méthodes d'intégration numérique sont bien adaptées aux calculs par ordinateur et elles ont été particulièrement utilisées aux Etats-Unis. L'intégration numérique des *Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac (APAE)* réalisée en 1951 a servi de base aux éphémérides anglaises et américaines des grosses planètes jusqu'en 1983. Ces dernières années des travaux très importants ont été réalisés au Jet Propulsion Laboratory (JPL) et l'intégration numérique DE200 du JPL sert de base aux éphémérides du Soleil et de l'ensemble des planètes publiées par l'*Astronomical Almanac* depuis 1984.

8.1.2.2. Mouvement képlérien

L'orbite képlérienne d'une planète autour du Soleil est une ellipse parfaitement définie par six éléments qui peuvent être choisis de différentes façons. Nous noterons :

a, le demi-grand axe de l'orbite ; a est relié au moyen mouvement de la planète n par la troisième loi de Kepler :

$$n^2 a^3 = k^2(1+m), \tag{8.1.1}$$

où m est la masse réduite de la planète (rapport de la masse de la planète à la masse du Soleil) et où k est la constante de Gauss (*cf.* 2.2.2) ;

e, l'excentricité de l'orbite ;

i, l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique ; au lieu de i on utilise généralement dans les équations la variable $\gamma = \sin \dfrac{i}{2}$;

Ω, la longitude du nœud ascendant de l'orbite sur l'écliptique, comptée à partir de l'équinoxe ;

ϖ, la longitude du périhélie, comptée à partir de l'équinoxe jusqu'au nœud ascendant sur l'écliptique et ensuite à partir du nœud jusqu'au périhélie, sur l'orbite ; ϖ est relié à l'argument du périhélie ω par $\varpi = \omega + \Omega$;

M, l'anomalie moyenne définie par $M = n(t - \tau)$, où t désigne le temps et τ, le temps de passage au périhélie ; M est reliée à la longitude moyenne λ par $\lambda = M + \varpi$.

On distingue souvent parmi ces variables les *variables métriques* (a, e, i ou γ) et les *variables angulaires* (Ω, ϖ ou ω, λ ou M).

Les excentricités et les inclinaisons des planètes étant faibles, pour éviter de les avoir au dénominateur des équations (*cf.* 8.1.2.4), on utilise souvent au lieu des variables e, γ, ϖ, Ω, les variables suivantes :

$$k = e\cos\varpi\,; \quad h = e\sin\varpi\,; \quad q = \gamma\cos\Omega\,; \quad p = \gamma\sin\Omega.$$

Pour décrire l'orbite d'une planète autour du Soleil, nous utiliserons, le plus souvent, soit les six variables $a, \lambda, e, \varpi, \gamma, \Omega$, soit les six variables a, λ, k, h, q, p. Nous serons amenés à distinguer la longitude moyenne λ des autres variables et nous noterons :

$$\begin{aligned} &\eta,\ \text{l'ensemble des cinq variables elliptiques autres que } \lambda,\\ &\rho,\ \text{l'ensemble des six variables elliptiques utilisées : } \{\rho\} = \{\eta, \lambda\}. \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

8.1.2.3. Mouvement perturbé

Lorsqu'on considère le problème général de N planètes[1] gravitant autour du Soleil, chaque planète est soumise à des perturbations dues à la présence des autres planètes. Considérons une planète P_i.

[1] On désigne ici par planète, le barycentre de la planète et de ses satellites éventuels affecté de la masse totale du système.

S représentant le Soleil et P_j une planète différente de P_i, notons $\mathbf{r_i}$ le vecteur $\mathbf{r_i} = \mathbf{SP_i}$ et posons $r_i = |\mathbf{SP_i}|$, $r_j = |\mathbf{SP_j}|$, $\Delta_{ij} = |\mathbf{P_iP_j}|$; les équations du mouvement pour la planète P_i s'écrivent :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{grad}\,(U_i + R_i) \tag{8.1.3}$$

où U_i est le *potentiel képlérien* dû au Soleil et R_i la *fonction perturbatrice* :

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{k^2(1+m_i)}{r_i}, \\ R_i &= \sum_{j \neq i} k^2 m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\mathbf{r_i} \cdot \mathbf{r_j}}{r_j^3} \right), \end{aligned} \tag{8.1.4}$$

la sommation étant étendue à toutes les planètes P_j.

8.1.2.4. Équations de Lagrange

L'orbite elliptique képlérienne est une première approximation du mouvement réel d'une planète. On appelle *éléments osculateurs* les éléments elliptiques que prendrait la planète à un instant t si, à partir de cet instant, toutes les forces perturbatrices disparaissaient. L'orbite réelle est tangente à l'orbite osculatrice à l'instant t et, dans le mouvement perturbé, les éléments osculateurs ne sont plus des constantes mais des fonctions du temps. Les éléments osculateurs sont très souvent employés pour décrire le mouvement réel. Les équations différentielles utilisant ces variables sont les équations de Lagrange. En variables $a, \lambda, e, \varpi, \gamma, \Omega$, ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \lambda} \\ \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} &= n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{u_1(1-u_1)}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\gamma}{2na^2 u_1}\frac{\partial R}{\partial \gamma} \\ \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2}\left[-\frac{u_1(1-u_1)}{e}\frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{u_1}{e}\frac{\partial R}{\partial \varpi}\right] \\ \frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2}\left[\frac{u_1}{e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\gamma}{2u_1}\frac{\partial R}{\partial \gamma}\right] \\ \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2}\left[-\frac{\gamma}{2u_1}\frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{\gamma}{2u_1}\frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{1}{4\gamma u_1}\frac{\partial R}{\partial \Omega}\right] \\ \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2}\frac{1}{4\gamma u_1}\frac{\partial R}{\partial \gamma} \end{aligned} \tag{8.1.5}$$

en posant $u_1 = \sqrt{1-e^2}$.

En variables a, λ, k, h, q, p ces équations deviennent :

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \lambda} \\
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} &= n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{u_1 u_2}{na^2}\left(h\frac{\partial R}{\partial h} + k\frac{\partial R}{\partial k}\right) + \frac{1}{2na^2 u_1}\left(p\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial q}\right) \\
\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2}\left[-u_1\frac{\partial R}{\partial h} - k u_1 u_2\frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{h}{2u_1}\left(p\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial q}\right)\right] \\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2}\left[u_1\frac{\partial R}{\partial k} - h u_1 u_2\frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{k}{2u_1}\left(p\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial q}\right)\right] \\
\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= \frac{-1}{2na^2 u_1}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial \lambda} + q\left(k\frac{\partial R}{\partial h} - h\frac{\partial R}{\partial k}\right)\right] \\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2na^2 u_1}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial q} - p\frac{\partial R}{\partial \lambda} - p\left(k\frac{\partial R}{\partial h} - h\frac{\partial R}{\partial k}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{8.1.6}
$$

en posant $u_2 = \dfrac{1}{1+u_1}\cdot$

La variable n qui figure, en particulier, dans les équations en $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}$ des systèmes (8.1.5) et (8.1.6) s'obtient à partir du demi-grand axe par l'équation (8.1.1). Il faut donc faire une double intégration de l'équation donnant le demi-grand axe avant de pouvoir obtenir la longitude moyenne. Dans la suite nous serons amenés à considérer la variable ε définie par :

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = n + \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\cdot \tag{8.1.7}$$

8.1.2.5. Forme des théories analytiques

Soit N le nombre des planètes P_i $(1 \leq i \leq N)$ du système. Le nombre des variables elliptiques et des équations à intégrer est alors de $6N$. Nous notons, conformément à (8.1.2) :

η_i, l'ensemble des $5N$ variables du système autres que les longitudes moyennes et λ_i les N longitudes moyennes ;

η_i^0 et λ_i^0, les constantes d'intégration correspondant aux variables η_i et λ_i, respectivement.

Nous notons, de plus :

$\bar{\lambda}_i$, les *longitudes moyennes moyennes* : $\bar{\lambda}_i = \bar{n}_i t + \lambda_i^0$ où $\bar{n}_i$, constante d'intégration de n_i (*cf.* 8.1.3.4), est le moyen mouvement moyen de la planète P_i.

On peut distinguer deux types de théories planétaires, les théories générales et les théories à variations séculaires.

Théories générales

Dans ce type de théories on trouve $3N$ fonctions linéaires du temps $\bar{\lambda}_i$, ψ_i et θ_i telles que les solutions sont des fonctions purement périodiques d'arguments Φ, combinaisons linéaires de $3N$

composantes :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} r_i \bar{\lambda}_i + \sum_{i=1}^{N} l_i \psi_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \theta_i \,, \tag{8.1.8}$$

où les $\bar{\lambda}_i$ sont les longitudes moyennes moyennes, les ψ_i et les θ_i sont des arguments dont les périodes sont de l'ordre de celles des longitudes des périhélies et des longitudes des nœuds, respectivement ; r_i, l_i, m_i sont des entiers.

Les $\bar{\lambda}_i$ sont des angles rapides (de période de l'ordre de trois mois pour Mercure jusqu'à 165 ans pour Neptune) tandis que les ψ_i et les θ_i sont des angles lents (de période de l'ordre de quelques dizaines de milliers d'années). Nous appelons *partie à courte période* de l'argument Φ l'expression $\sum_{i=1}^{N} r_i \bar{\lambda}_i$ et *partie à longue période* de Φ l'expression $\sum_{i=1}^{N} l_i \psi_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \theta_i$. De même nous appelons *arguments à longue période* les arguments (8.1.8) pour lesquels $r_i = 0$ et nous les notons Φ^*. En définitive, pour une planète $\mathrm{P}(\eta, \lambda)$ quelconque du système, les solutions ont la forme de séries de Fourier :

$$\begin{aligned} \eta &= \eta^0 + \sum_{\Phi^*} A_{\Phi^*} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \Phi^* + \sum_{\Phi} A_{\Phi} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \Phi \\ \lambda &= \bar{\lambda} + \sum_{\Phi^*} B_{\Phi^*} \sin \Phi^* + \sum_{\Phi} B_{\Phi} \sin \Phi \,. \end{aligned} \tag{8.1.9}$$

Dans les expressions (8.1.9), les coefficients $A_{\Phi^*}, A_{\Phi}, B_{\Phi^*}, B_{\Phi}$ sont des fonctions analytiques ou semi-analytiques des constantes d'intégration ; les variables η sont des séries de cosinus pour les variables a, e, i, k, q et des séries de sinus pour les variables ϖ, Ω, h, p. On notera qu'il n'existe pas de termes séculaires dans les éléments métriques ni dans les éléments k, h, q, p ce qui permet à ces théories de garder un intervalle de validité très grand, de l'ordre de quelques millions d'années.

Théories à variations séculaires

Les théories générales donnent des renseignements intéressants sur l'évolution du système solaire sur un temps très long mais elles ne servent pas à construire des éphémérides. Celles-ci s'obtiennent à partir de théories à variations séculaires dont la forme peut être déduite de celle des théories générales de la manière suivante. Partant des expressions (8.1.9), nous pouvons développer par rapport au temps les fonctions trigonométriques des arguments à longue période Φ^* et les parties à longue période des arguments Φ. Nous obtenons alors les développements des théories à variations séculaires sous la forme de séries de Poisson des longitudes moyennes moyennes $\bar{\lambda}_i$. Pour une planète $\mathrm{P}(\eta, \lambda)$, ces développements s'écrivent :

$$\begin{aligned} \eta &= \eta^0 + \eta^1\, t + \eta^2\, t^2 + \ldots + \eta^p\, t^p + S^0 + t\, S^1 + \ldots + t^p\, S^p \,, \\ \lambda &= \lambda^0 + \bar{n}\, t + l^2\, t^2 + \ldots + l^p t^p + L^0 + t\, L^1 + \ldots + t^p\, L^p \,, \end{aligned} \tag{8.1.10}$$

où $\bar{n}$ est le moyen mouvement moyen de la planète P, $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^p, l^2, \ldots, l^p$ sont des coefficients numériques que l'on appelle *termes séculaires d'ordre* $1, 2, \ldots, p$ des variables η et λ et où $S^0, \ldots, S^p, L^0, \ldots, L^p$ sont des séries de Fourier des N longitudes moyennes moyennes $\bar{\lambda}_i$. Les termes séculaires sont les développements par rapport au temps des perturbations à longue période des théories générales.

Les solutions sous la forme (8.1.10) sont beaucoup moins volumineuses que sous la forme (8.1.9). Elles permettent d'obtenir des théories planétaires gardant une très grande précision sur un intervalle de temps de l'ordre du millier d'années. Bien entendu, dans la pratique, on n'obtient pas ce type de théorie à partir de théories générales et nous allons, dans le paragraphe suivant, expliquer comment on les construit directement.

On peut aussi construire des théories à variations séculaires d'une forme différente en exprimant les longitudes moyennes $\bar{\lambda}_i$ en fonction d'un seul argument ν par des relations du type :

$$\bar{\lambda}_i = q_i \nu + \sigma_i t, \tag{8.1.11}$$

où ν est une fonction linéaire du temps, q_i un entier et σ_i une quantité très petite devant le moyen mouvement moyen $\bar{n}_i$. Avec un choix convenable de l'argument ν, ce type de solutions permet de représenter les perturbations de Jupiter et Saturne par des développements en puissance du temps beaucoup plus rapidement convergents que les développements classiques (8.1.10) (Simon et Joutel, 1988).

8.1.3. Construction de théories planétaires à variations séculaires

8.1.3.1. Méthodes d'intégration

Les théories planétaires à variations séculaires dont sont issues les éphémérides publiées dans la *Connaissance des Temps* reposent sur deux types de méthode d'intégration, l'intégration ordre par ordre par rapport aux masses et l'intégration par itération.

Intégration ordre par ordre par rapport aux masses

Remplaçons dans les équations de Lagrange les équations en $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}$ par les équations en $\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$ où ε est définie par (8.1.7). Les systèmes (8.1.5) ou (8.1.6) ont alors la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \mu F(\rho_i) \tag{8.1.12}$$

où μ est un paramètre de l'ordre des masses. $F(\rho_i)$ se calcule à partir de la fonction perturbatrice et de ses dérivées par rapport aux éléments. On cherche à exprimer la solution sous la forme :

$$\rho = \rho^0 + \mu\,\Delta^1\rho + \mu^2\,\Delta^2\rho + \mu^3\,\Delta^3\rho + \ldots \tag{8.1.13}$$

Nous appelons *perturbations d'ordre p par rapport aux masses* de la variable ρ la quantité $\Delta^p\rho$. Les théories modernes utilisant cette méthode ont été développées jusqu'au troisième ordre des masses. En substituant (8.1.13) dans (8.1.12), en développant suivant la formule de Taylor et en identifiant les deux membres en μ, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta^1\rho}{\mathrm{d}t} = F(\rho_i^0), \tag{8.1.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta^2\rho}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \rho_i}(\rho_i^0)\,\Delta^1\rho_i, \tag{8.1.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta^3\rho}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \rho_i}(\rho_i^0)\,\Delta^2\rho_i + \sum_{i,j} \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \rho_i \partial \rho_j}(\rho_i^0)\,\Delta^1\rho_i\Delta^1\rho_j, \tag{8.1.16}$$

$$\ldots$$

L'intégration de l'équation (8.1.14) donne les perturbations du premier ordre des masses $\Delta^1\rho$; l'intégration de (8.1.15) donne ensuite les perturbations du deuxième ordre des masses $\Delta^2\rho$; l'intégration de (8.1.16) donne les perturbations du troisième ordre des masses $\Delta^3\rho$, et ainsi de suite.

Intégration par itération

Le système à intégrer a la forme (8.1.12). Notons ρ^n la solution de l'itération n, nous avons, pour la première itération :

$$\frac{\mathrm{d}\rho^1}{\mathrm{d}t} = \mu\, F(\rho_i^0),$$

d'où $\rho^1 = \rho^0 + \mu\,\Delta^1\rho$ avec : $\mu\,\Delta^1\rho = \mu \int F(\rho_i^0)\,dt$. Le résultat de la première itération est rigoureusement identique au premier ordre de la méthode précédente. La solution de la deuxième itération est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}\rho^2}{\mathrm{d}t} = \mu\, F(\rho^1) = \mu\, F(\rho_i^0) + \mu^2 \sum_i \frac{\partial F}{\partial \rho_i}(\rho_i^0)\,\Delta^1\rho_i + \sum_{i,j} \frac{\mu^3}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial\rho_i\partial\rho_j}(\rho_i^0)\,\Delta^1\rho_i\Delta^1\rho_j + \dots$$

Le résultat de la deuxième itération contient des termes d'ordre trois et plus par rapport aux masses et est donc différent du deuxième ordre de la méthode ordre par ordre par rapport aux masses. La solution de l'itération n est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}\rho^n}{\mathrm{d}t} = \mu\, F(\rho^{n-1}).$$

8.1.3.2. Calcul des seconds membres des équations

Les seconds membres des équations de Lagrange se calculent à partir de la fonction perturbatrice et de ses dérivées par rapport aux éléments. Ce calcul peut s'effectuer de deux façons, analytiquement ou en utilisant un formulaire permettant le calcul sous une forme fermée.

Calcul analytique

Il est possible de développer la fonction perturbatrice analytiquement par rapport aux variables définies au paragraphe 8.1.2.2. Il existe de nombreux formulaires de développement. On citera, par exemple, les formulaires de Le Verrier (1874), Izsak (1965), Brumberg (1967). Les théories modernes construites en utilisant cette méthode se sont appuyées sur le formulaire de Brumberg (1967), repris par Chapront (1970) : Considérons deux planètes P et P′ et soit Φ l'argument défini par

$$\Phi = qM + q'M' + s\omega + s'\omega' + j(\Omega - \Omega'), \tag{8.1.17}$$

où l'indice $'$ se rapporte à la planète P′ et où q, q', s, s', j sont des entiers. La fonction perturbatrice se développe sous la forme :

$$R = \mu \sum_{qq'ss'j} A_{qq'ss'j}\, cos\, \Phi, \tag{8.1.18}$$

où μ est un paramètre de l'ordre des masses et où $A_{qq'ss'j}$ est une fonction analytique de $a, a', e, e', \gamma, \gamma'$. À partir de ce développement analytique de R on peut ensuite construire un développement analytique des dérivées premières, secondes et troisièmes de la fonction perturbatrice (Simon et Chapront, 1974 ; Simon et Francou, 1981). Pour un couple de planètes, on calcule alors les seconds membres des équations de la manière suivante : on construit une liste aussi complète que possible d'arguments de la forme (8.1.17) de façon à obtenir un développement de la fonction perturbatrice sous la forme (8.1.18) et les développements analytiques de ses dérivées. Il est alors possible d'obtenir les seconds membres des équations ainsi que leurs dérivées premières et secondes.

Formulaire sous forme fermée

On peut aussi calculer les seconds membres des équations de Lagrange de la manière suivante. Considérons un couple de planètes P, P$'$, de masses m, m'. S désignant le Soleil, notons $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ les vecteurs de position de P(x, y, z) et P$'(x', y', z')$ dans un système héliocentrique et posons :

$$r = |\mathbf{r}|, \qquad r' = |\mathbf{r}'|, \qquad \Delta = |\mathbf{PP}'| .$$

La fonction perturbatrice R définie par (8.1.4) s'écrit :

$$R = k^2 m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r}.\mathbf{r}'}{r'^3} \right) .$$

Notons ρ_i l'une quelconque des variables elliptiques. Nous calculons les dérivées partielles $\partial R/\partial \rho_i$ à l'aide du produit scalaire :

$$\frac{\partial R}{\partial \rho_i} = \partial \mathbf{R} \, . \, \partial_{\rho_i} \mathbf{r}$$

où $\partial \mathbf{R}$ et $\partial_{\rho_i} \mathbf{r}$ sont les vecteurs de composantes $\partial R/\partial x, \partial R/\partial y, \partial R/\partial z$ et $\partial x/\partial \rho_i, \partial y/\partial \rho_i, \partial z/\partial \rho_i$. Le calcul des composantes de $\partial_{\rho_i} \mathbf{r}$ est classique (voir, par exemple, Levallois et Kovalevsky, 1971). Les composantes de $\partial \mathbf{R}$ se calculent par :

$$\partial \mathbf{R} = k^2 m' \left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{\Delta^3} - \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right) .$$

On peut calculer ainsi les seconds membres des équations de Lagrange sous forme fermée par rapport aux variables sans qu'il soit besoin de développer la fonction perturbatrice (Chapront et al., 1975). Ce mode de calcul est particulièrement bien adapté aux méthodes itératives (Bretagnon, 1981 ; Simon et Francou, 1982). On peut aussi l'appliquer aux méthodes d'intégration ordre par ordre par rapport aux masses en calculant sous forme fermée les dérivées premières et secondes des seconds membres des équations (Bretagnon, 1980, 1982).

8.1.3.3. Compléments à la fonction perturbatrice

Perturbations du barycentre Terre–Lune

Il est nécessaire dans une théorie des planètes de tenir compte de l'effet de la Lune sur le barycentre Terre–Lune. Notons m_S, m_T, m_L les masses du Soleil, de la Terre et de la Lune, r_T, r_G, r_L les distances au Soleil de la Terre, du barycentre Terre–Lune et de la Lune, respectivement. Pour tenir compte de l'effet de la Lune sur le barycentre Terre–Lune il faut ajouter dans les équations concernant le barycentre Terre–Lune la fonction perturbatrice R_G définie par :

$$R_G = k^2(m_S + m_T + m_L)[(1-\sigma_1)\frac{1}{r_T} + \sigma_1\frac{1}{r_L} - \frac{1}{r_G}], \tag{8.1.19}$$

où σ_1 désigne le rapport $\dfrac{m_L}{m_T + m_L}$ (Bretagnon, 1980).

Corrections relativistes

Les mouvements des centres d'inertie de N corps peuvent être calculés dans la théorie de la relativité générale à partir d'un lagrangien dont l'expression est très compliquée. Dans la pratique, cependant, outre les termes newtoniens, seuls les termes relativistes dits de Schwarzschild, issus du champ de gravitation du Soleil, ont une importance dans le système solaire. Les équations des mouvements héliocentriques des planètes (8.1.3) s'écrivent, en ne tenant compte que des termes newtoniens et de Schwarzschild, de la manière suivante (Brumberg, 1972) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t^2} &= \mathbf{grad}\,(U_i + R_i)\\ &+ \frac{k^2}{c^2}[(4-2\alpha)\frac{k^2}{r_i^4}\mathbf{r_i} - \frac{1+\alpha}{r_i^3}\mathbf{r_i}(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t})^2 + \frac{3\alpha}{r_i^5}\mathbf{r_i}(\mathbf{r_i}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t})^2 + \frac{4-2\alpha}{r_i^3}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r_i}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t})],\end{aligned} \tag{8.1.20}$$

où c désigne la vitesse de la lumière, et où α est un paramètre uniquement fonction du système de coordonnées choisi parmi les trois cas couverts par les équations (8.1.20) ($\alpha = 0$: coordonnées isotropiques ; $\alpha = 1$: coordonnées standard ; $\alpha = 2$: coordonnées de Painlevé).

À partir de ces équations on peut calculer les corrections relativistes du premier ordre par rapport au rayon gravitationnel du Soleil, les corrections purement relativistes du deuxième ordre et les corrections dites composites qui traduisent l'influence des corrections relativistes dans l'accélération newtonienne et, inversement, celle des perturbations newtoniennes dans l'accélération relativiste (Lestrade et Bretagnon, 1982).

8.1.3.4. Détermination des constantes d'intégration

Dans les solutions (8.1.10), les coefficients numériques $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^p, l^2, \ldots, l^p$ ainsi que les coefficients des séries de Fourier S^p et L^p sont calculés par la théorie. Les constantes d'intégration η^0 autres que a^0, les constantes λ^0 et les moyens mouvements moyens $\bar{n}$ des longitudes moyennes λ sont, au contraire, obtenus par ajustement de la théorie avec les observations (les constantes a^0 se déduisant des moyens mouvements moyens par la troisième loi de Kepler). Cet ajustement peut se faire soit directement par comparaison aux observations, soit par comparaison avec un modèle numérique lui-même ajusté aux observations. Ainsi, par exemple, les constantes des solutions construites ces dernières années au Bureau des longitudes ont été obtenues par comparaison avec l'intégration numérique du JPL, DE200 (*cf.* 8.1.4.3).

8.1.4. Théories planétaires utilisées pour les éphémérides de la Connaissance des Temps

8.1.4.1. Système des masses planétaires

Nous rassemblons dans la table 8.1.3 les rapports de la masse du Soleil à la masse des planètes principales utilisés dans différentes théories planétaires ou différents systèmes de constantes. Nous donnons les valeurs utilisées par Le Verrier (1856), Newcomb (1898), Gaillot (1913), DE200 et les valeurs données dans les systèmes de constantes UAI 1976 et IERS standards (1992).

Table 8.1.3. Rapport de la masse du Soleil à la masse des systèmes planétaires.

	Le Verrier (1856)(1)	Gaillot (1913)(2)	Newcomb (1898)(3)	UAI (1976)	DE200 (1982)	IERS (1992)
Mercure	3 000 000		6 000 000	6 000 000	6 023 600	6 023 600
Vénus	401 847	412 150	408 000	408 523.5	408 523.5	408 523.71
Terre + Lune	354 936	324 439	329 390	328 900.5	328 900.55	328 900.56
Mars	2 680 337	2 812 526	3 093 500	3 098 710	3 098 710	3 098 708
Jupiter	1 050	1 047.52	1 047.35	1 047.355	1 047.350	1 047.3486
Saturne	3 512	3 499.8	3 501.6	3 498.5	3 498.0	3 497.90
Uranus	24 000	22 453	22 756	22 869	22 960	22 902.94
Neptune	14 400	19 094	19 540	19 314	19 314	19 412.24

(1) Valeurs utilisées par Le Verrier pour sa théorie des planètes telluriques
(2) Valeurs utilisées par Gaillot pour sa théorie des grosses planètes
(3) Valeurs utilisées par Newcomb pour sa théorie des planètes telluriques

8.1.4.2 Théories anciennes

Les éphémérides publiées dans la *Connaissance des Temps* jusqu'en en 1983 étaient issues des théories de Le Verrier et des théories de Le Verrier et Gaillot.

Les théories de Le Verrier

Le Verrier a construit une théorie de l'ensemble des huit planètes principales du système solaire Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Les résultats de son travail ont été publiés entre 1855 et 1877 dans les *Annales de l'observatoire de Paris.* Il construit ses théories en utilisant les éléments elliptiques classiques $a, \lambda, e, \varpi, i, \Omega$, en intégrant les équations ordre par ordre par rapport aux masses et en développant les solutions jusqu'à l'ordre 2 des masses. Sa théorie est d'abord construite analytiquement par rapport à l'ensemble des variables, puis ensuite développée en séries de Poisson des longitudes moyennes moyennes sous une forme analogue à (8.1.10). Le deuxième ordre des masses est très incomplet pour les planètes telluriques et ne contient que très peu de termes périodiques (deux pour la Terre et Mars, un pour Vénus, aucun pour Mercure) mais est assez complet pour les grosses planètes, en particulier en ce qui concerne les perturbations mutuelles Jupiter-Saturne. Les valeurs des masses données dans la table 8.1.3 sont celles utilisées par Le Verrier pour construire sa théorie des planètes telluriques mais il les a améliorées par la suite, trouvant, pour Mercure, $m{=}1/5\,310\,000$ et, pour la Terre, Vénus et Mars les valeurs Gaillot (1913) de la table 8.1.3.

Les théories de Le Verrier-Gaillot

Au début du siècle, Gaillot (1904) constate que la théorie de Le Verrier se dégrade dans ses comparaisons à l'observation principalement pour les grosses planètes dont il reprend la théorie. Gaillot utilise les mêmes variables que Le Verrier et construit directement ses solutions en séries de Poisson des longitudes moyennes moyennes sous une forme analogue à (8.1.10). Pour le couple Jupiter-Saturne (Gaillot, 1904, 1913), il applique une méthode d'interpolation qui est en fait une méthode itérative basée sur une analyse de Fourier. Il utilise comme point de départ la théorie au deuxième ordre des masses de Le Verrier et effectue une itération, obtenant ainsi le troisième ordre des masses et les termes d'ordre supérieur provenant du premier et du deuxième ordre. À partir de ce résultat il calcule analytiquement un certain nombre de termes du quatrième ordre provenant du troisième ordre de Saturne. Gaillot a ainsi fait progresser les théories de Jupiter et Saturne et son travail a permis, en particulier, une amélioration de la détermination des masses des quatre grosses planètes, en particulier pour Saturne (Table 8.1.3). En ce qui concerne Uranus et Neptune, Gaillot (1910) a repris le travail de Le Verrier en utilisant de meilleures valeurs des masses des planètes et des constantes d'intégration. En définitive Gaillot a construit une excellente théorie au deuxième ordre des masses des quatre grosses planètes, avec un calcul très complet des perturbations mutuelles du couple Jupiter-Saturne d'ordre 3 par rapport aux masses.

Les théories de Newcomb

Les perturbations du mouvement des planètes telluriques Mercure, Vénus, la Terre et Mars sont de faible amplitude et les erreurs de la théorie de Le Verrier proviennent essentiellement des grandes incertitudes sur les masses planétaires dans le calcul des variations séculaires des éléments.

À la fin du dix-neuvième siècle, Newcomb a entrepris un travail comparable à celui de Le Verrier. Dans le calcul des perturbations des planètes telluriques, il a construit une solution au second ordre des masses planétaires. Il a utilisé de meilleures valeurs des masses que celles connues par Le Verrier, ses valeurs étant de dix à cent fois plus précises comme le montre la table 8.1.3. Bénéficiant de quarante années d'observation supplémentaires, il a obtenu une très bonne détermination des constantes d'intégration.

La théorie du Soleil de Newcomb, publiée en 1898 dans les *Astronomical Papers of the American Ephemeris, vol. VI*, a été utilisée dans les éphémérides de l'*American Ephemeris* jusqu'en 1983. Son erreur, pour l'époque actuelle, est de l'ordre de $0''\!.9$ alors que la théorie du Soleil de Le Verrier comporte des différences avec l'observation pouvant atteindre $1''\!.6$. Pour les planètes Mercure, Vénus et Mars, l'amélioration due à Newcomb est encore plus importante et les éphémérides issues de ses théories sont trois à cinq fois plus précises que celles de Le Verrier.

En ce qui concerne les grosses planètes, les éphémérides publiées jusqu'en 1959 par les *American Ephemeris* sont issues des théories de Hill pour Jupiter et Saturne et de celles de Newcomb pour Uranus et Neptune. Les erreurs de ces éphémérides sont du même ordre de grandeur que les erreurs des solutions de Le Verrier-Gaillot, y compris pour Neptune. Dans les solutions de Hill et de Newcomb, les erreurs sont de l'ordre de $1''$ pour Jupiter et Uranus, de $2''$ pour Saturne et peuvent atteindre $10''$ pour Neptune.

8.1.4.3. Théories du Bureau des longitudes

Ces dernières années ont été construites au Bureau des longitudes un certain nombre de théories planétaires qui ont servi à l'élaboration des éphémérides et des éléments moyens des planètes publiés dans la *Connaissance des Temps*.

Ces théories ont des formes très voisines. Ce sont des théories à variations séculaires semi-analytiques par rapport aux longitudes moyennes moyennes de la forme (8.1.10). Elles utilisent les valeurs des masses UAI 1976 de la table 8.1.3. Comme nous l'avons indiqué plus haut elles n'ont pas été comparées directement aux observations et leurs constantes d'intégration ont été obtenues par ajustement à l'intégration numérique du JPL, DE200.

VSOP82

Bretagnon (1982) a construit une théorie de l'ensemble des huit planètes principales, VSOP82 (*Variations séculaires des orbites planétaires*). Cette théorie utilise les variables a, λ, k, h, q, p. Elle est construite en intégrant d'abord les équations correspondant au mouvement des huit planètes ordre par ordre par rapport aux masses. Les seconds membres et leurs dérivées sont calculés sous forme fermée et les solutions sont développées jusqu'à l'ordre 3 des masses. La théorie est complétée pour les quatre grosses planètes par des termes d'ordre supérieur obtenus par une méthode itérative qui permet d'obtenir les perturbations sous forme de séries de Poisson (8.1.10) allant jusqu'au degré 5 par rapport au temps. La théorie contient également les perturbations de la Lune sur le barycentre Terre–Lune et les corrections relativistes calculées dans chacun des systèmes de coordonnées isotropique et standard. VSOP82 est la solution de base des éphémérides du Soleil et des planètes publiées dans la *Connaissance des Temps* depuis 1984.

TOP82

Simon (1983) a construit une théorie des quatre grosses planètes TOP82 (*Theory of outer planets*). Cette théorie utilise les variables elliptiques $a, \lambda, e, \varpi, \gamma, \Omega$. Elle est obtenue en intégrant ordre par ordre par rapport aux masses les équations correspondant au mouvement des quatre grosses planètes. Les seconds membres des équations et leurs dérivées sont calculés à partir des formulaires de Brumberg (1967) et Chapront (1970). Les solutions sont développées jusqu'à l'ordre 3 des masses. Elles sont complétées pour le couple Jupiter-Saturne par une méthode itérative basée sur une analyse harmonique, inspirée de la méthode d'interpolation de Gaillot, qui permet d'obtenir les perturbations mutuelles du couple Jupiter-Saturne sous forme de séries de Poisson (8.1.10) allant jusqu'au degré 6 par rapport au temps. Cette théorie contient aussi les perturbations dues aux planètes telluriques issues de VSOP82 et les effets relativistes.

À la précision de la publication, les éphémérides issues des théories VSOP82 et TOP82 sont identiques pour Jupiter et Saturne.

JASON84

Partant de TOP82, Simon et Bretagnon (1984) ont construit une théorie de Jupiter et Saturne JASON84 (*Jupiter and Saturn orbits from Neolithic*) où les perturbations mutuelles de Jupiter et Saturne sont calculées, par analyse harmonique, sous forme de séries de Poisson allant jusqu'au degré 20 par rapport au temps. L'intervalle de validité de la théorie est ainsi notablement étendu et les solutions représentent le mouvement de Jupiter et Saturne sur un intervalle de temps de 12 000 ans. Les variables utilisées sont celles de TOP82. Cette théorie n'a pas été utilisée pour construire les éphémérides publiées dans la *Connaissance des Temps* mais elle permet de donner des expressions très précises des éléments moyens de Jupiter et Saturne (*cf.* 8.1.5).

VSOP87

Les théories précédentes utilisent les variables elliptiques. À partir de VSOP82, Bretagnon et Francou (1988) ont construit les solutions VSOP87 qui sont exprimées en variables rectangulaires X, Y, Z ou en variables sphériques, longitude, latitude et rayon vecteur. Les systèmes de référence utilisés sont l'écliptique et l'équinoxe J2000 ou l'écliptique et l'équinoxe moyens de la date. Les coordonnées sont héliocentriques ou barycentriques. Ces solutions n'ont pas servi à l'élaboration des éphémérides mais elles sont utiles pour un certain nombre de problèmes comme le calcul des perturbations planétaires de la Lune, des expressions analytiques des positions apparentes, des expressions analytiques de la nutation ou de la différence TDB − TT.

8.1.4.4. Comparaison des théories du Bureau des longitudes à DE200

L'intégration numérique du JPL DE200/LE200 (Standish et al., 1981) est la base des éphémérides planétaires et lunaires publiées dans *The Astronomical Almanac* depuis 1984. Nous renvoyons au paragraphe 8.2.3 pour la description de cette intégration numérique.

DE200 joue aussi un rôle important dans la construction des éphémérides publiées par la *Connaissance des Temps* puisqu'elle a servi à déterminer, par ajustement, les constantes d'intégration des théories planétaires du Bureau des longitudes. La table 8.1.4 donne une idée des écarts entre les théories du Bureau des longitudes et DE200. Elle donne les plus grosses différences entre VSOP82 et DE200 sur l'intervalle [1891, 2000] pour les variables héliocentriques longitude, latitude, rayon vecteur. On constate que les différences, très faibles pour les planètes telluriques, sont relativement importantes pour Jupiter, Saturne et Neptune. Ceci provient de l'utilisation de masses planétaires différentes dans les deux solutions : la masse d'Uranus utilisée par DE200 est, en particulier, très différente de la valeur UAI 1976 utilisée par VSOP82 comme d'ailleurs de la valeur plus moderne IERS 1992. Ces différences de masse modifient sensiblement les perturbations des grosses planètes, principalement celles de Saturne et Neptune.

8.1.4.5. Précision des théories

Les incertitudes sur les éphémérides issues des théories planétaires sont de différentes natures. L'intégration des équations différentielles du mouvement des planètes est effectuée à une précision

Table 8.1.4. Plus grosses différences entre VSOP82 et DE200 sur l'intervalle [1891, 2000] pour les coordonnées héliocentriques des huit planètes principales (d'après Bretagnon, 1982).

Planète	Longitude ($''$)	Latitude ($''$)	Rayon vecteur (10^{-10} ua)
Mercure	0.001	3×10^{-4}	9
Vénus	0.006	0.002	90
Terre	0.005	0.002	160
Mars	0.023	0.004	478
Jupiter	0.071	0.006	6579
Saturne	0.144	0.008	29586
Uranus	0.017	0.006	18865
Neptune	0.087	0.005	135 805

Table 8.1.5. Précision globale des éphémérides du Soleil et des planètes principales publiées dans la *Connaissance des Temps.*

Astre	Précision globale
Soleil	$0''.3$
Mercure	$0''.9$
Vénus	$0''.3$
Mars	$0''.4$
Jupiter	$0''.5$
Saturne	$0''.9$
Uranus	$0''.5$
Neptune	$1''$

meilleure que $0''.01$ sur la période [1900, 2000] sauf pour Mars ($0''.02$), Jupiter ($0''.02$) et Saturne ($0''.10$). Ces incertitudes supposent parfaits le modèle gravitationnel et les paramètres physiques utilisés. En fait, une meilleure connaissance des masses planétaires montre aujourd'hui que les masses recommandées par l'assemblée générale de l'UAI de Grenoble (1976), que nous avons utilisées, induisent des erreurs négligeables pour les planètes telluriques mais pouvant atteindre plusieurs centièmes de seconde de degré pour les grosses planètes Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

Une autre source importante d'incertitude dans l'établissement des théories planétaires est la détermination des constantes d'intégration par comparaison aux observations. Cette incertitude est de plusieurs centièmes de seconde pour les planètes de Mercure à Jupiter et atteint plusieurs dixièmes de seconde pour Saturne, Uranus et Neptune.

Finalement, la précision des théories planétaires construites au Bureau des longitudes et utilisées dans le calcul des éphémérides est de $0''.10$ pour Mercure, Vénus, la Terre et Mars, de $0''.35$ pour Jupiter, de $0''.50$ pour Saturne, de $0''.70$ pour Uranus et de $1''$ pour Neptune. Dans ces incertitudes la part la plus importante provient de la qualité des observations.

Dans la *Connaissance des Temps* les éléments des planètes sont représentés par des polynômes de Tchebychev. Les intervalles de temps choisis pour ces éléments et le nombre de coefficients des polynômes sont tels que les longitudes héliocentriques des planètes sont représentées à une précision de 10^{-5} degré soit $0''.036$. Cette représentation ne dégrade donc pas la qualité intrinsèque des théories. En revanche, la représentation des ascensions droites en polynômes de Tchebychev est effectuée à la précision de $0''.75$ pour Mercure, de $0''.30$ pour Mars et de $0''.15$ pour le Soleil et les autres planètes.

La précision globale des éphémérides des planètes publiées dans la *Connaissance des Temps* est la somme de la précision des théories et de la précision de la représentation. La table 8.1.5 en donne une estimation.

8.1.5. Éléments moyens des planètes

8.1.5.1. Définition

Nous appelons *éléments moyens* des variables η et λ, les parties séculaires $<\eta>$ et $<\lambda>$ des expressions (8.1.10) :

$$\begin{aligned} <\eta> &= \eta^0 + \eta^1\, t + \eta^2\, t^2 + \ldots + \eta^p\, t^p, \\ <\lambda> &= \lambda^0 + \bar{n}\, t + l^2\, t^2 + \ldots + l^p t^p\,. \end{aligned} \tag{8.1.21}$$

Cette définition appelle les remarques suivantes :

– Ces éléments moyens sont aussi les développements par rapport au temps des perturbations à longue période des théories générales (*cf.* 8.1.2.5).

– Dans les expressions (8.1.21), les coefficients numériques η^1, η^2, …, η^p, l^2 …, l^p sont issus de la théorie. Les moyens mouvements moyens $\bar{n}$, les constantes d'intégration η^0 (par l'intermédiaire des moyens mouvements en ce qui concerne les a^0) et λ^0 sont obtenus par comparaison des solutions sous leur forme complète (8.1.10) avec les observations. Les éléments moyens sont donc étroitement liés à la théorie dont ils sont issus.

– Un élément moyen donné $<\eta>$ ou $<\lambda>$ de la forme (8.1.21) se déduit de la série de Poisson complète (8.1.10) de la variable correspondante. Ainsi, par exemple, si l'on veut calculer les éléments moyens des variables $e, \varpi, \gamma, \Omega$ à partir de ceux des variables k, h, q, p, ou inversement, il faut effectuer le changement de variables sur les solutions complètes (8.1.10). Le changement de variables effectué directement sur les expressions (8.1.21) donnerait en effet des résultats peu précis.

– Dans les expressions (8.1.10) et (8.1.21), le temps t est compté à partir d'une origine fixée t_0 et les éléments moyens sont rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe fixes t_0. Pour les théories construites au Bureau des longitudes cette origine des temps est J2000 (date julienne 2 451 545). On peut en déduire des éléments moyens rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe de la date en utilisant les formules de variations des éléments d'une orbite entre deux époques données au paragraphe 4.5.9.

8.1.5.2. Usage

On utilise les éléments moyens pour, principalement :

• déterminer les constantes d'intégration de départ, lorsqu'on construit une théorie planétaire à variations séculaires ; ainsi les théories du Bureau des longitudes ont utilisé des constantes de départ issues des éléments moyens de Le Verrier et de Le Verrier et Gaillot ; ces constantes sont ensuite modifiées par comparaison aux observations ;

• déterminer les constantes d'intégration des théories planétaires générales ; celles-ci s'obtiennent, en effet, par ajustement aux éléments moyens des parties à longue période des solutions (Laskar, 1988 ; Bretagnon, 1990) ;

• améliorer les théories planétaires générales par ajustement des termes à longue période des théories générales aux éléments moyens des théories à variations séculaires (Bretagnon et Simon, 1990) ;

• estimer la précision des théories planétaires générales par comparaison de leurs longues périodes aux éléments moyens d'une théorie à variations séculaires (Laskar, 1990).

Par contre les éléments moyens ne servent pas à calculer des éphémérides des planètes, même approchées. Ils définissent, en effet, à chaque instant t une orbite moyenne qui n'est évidemment pas l'orbite osculatrice à cet instant. Toute éphéméride calculée à partir de ces éléments moyens serait de très faible précision, l'erreur commise étant très importante, en particulier sur les grosses planètes. Ainsi, par exemple, pour la longitude moyenne de Saturne, la perturbation périodique la plus importante et qui n'est pas prise en compte dans un tel calcul est de l'ordre de $0^\circ.8$. Il reste toutefois possible d'obtenir des éphémérides approchées des planètes de précision satisfaisante à partir d'expressions comprenant les éléments moyens et un petit nombre de termes périodiques (Simon et al., 1994).

8.1.5.3. Termes séculaires des demi-grands axes

L'apparition de termes séculaires dans les perturbations du demi-grand axe dépend étroitement du repère utilisé et de la façon dont sont définies les approximations successives par rapport aux masses.

Dans un système rapporté au centre de gravité du système solaire (Lagrange, 1809), ou si l'on utilise des éléments elliptiques associés au système de Jacobi (Tisserand, 1876), aucun terme séculaire n'apparaît, dans le demi-grand axe, ni à la première, ni à la deuxième approximation par rapport aux masses.

Il en va différemment dans le cas des théories planétaires à variations séculaires (*cf.* 8.1.2.5) qui sont construites avec des variables elliptiques héliocentriques. Gaillot (1904) avait noté l'existence de termes séculaires de degré 1 par rapport au temps, dans le demi-grand axe, à la troisième approximation par rapport aux masses mais, en réalité, on sait depuis les résultats numériques de Simon et Bretagnon (1978) et la nouvelle formulation du théorème de Poisson en variables héliocentriques donnée par Duriez (1978), que ces termes séculaires apparaissent dans le demi-grand axe dès la deuxième approximation. Ces termes sont numériquement petits mais ils donnent, par double intégration, des termes séculaires importants dans les longitudes moyennes, en particulier pour les planètes Jupiter et Saturne : au bout de 1000 ans, le terme en t^2 de la longitude moyenne de Jupiter atteint $30''$, celui de Saturne, $75''$. Ces termes séculaires n'existent pas dans les théories anciennes. Ils ont été calculés jusqu'à un degré élevé du temps, en ce qui concerne Jupiter et Saturne, dans JASON84.

8.1.5.4. Expressions numériques des éléments moyens

La *Connaissance des Temps* a publié jusqu'en 1983 les éléments moyens issus des théories de Le Verrier pour les planètes telluriques, des théories de Le Verrier et Gaillot pour les grosses planètes ainsi que des éléments moyens issus des théories de Newcomb pour les planètes telluriques. De 1984 à 1995 elle a publié les éléments moyens des huit planètes principales issus de VSOP82 et les éléments moyens des quatre grosses planètes issus de TOP82.

Des valeurs plus récentes des éléments moyens des planètes, rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens dynamiques inertiels (*cf.* 4.2.1) J2000 et à l'écliptique et à l'équinoxe moyens dynamiques inertiels de la date ont été publiées dans Simon et al. (1994). Ces éléments moyens sont donnés pour les variables $a, \lambda, e, \varpi, i, \Omega, k, h, q, p$; ils sont issus de VSOP87 pour Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Uranus et Neptune et de JASON84 pour Jupiter et Saturne. Dans cet ouvrage nous donnons les éléments moyens des planètes issus de cet article, rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe de la date. Dans les formules, t est TDB mesuré en milliers d'années juliennes à partir de J2000 :

$$t = (DJ \ - \ 2\,451\,545.0)/365\,250, \tag{8.1.22}$$

a est mesuré en ua, e, k, h, q, p sont sans dimension. Pour les variables angulaires $(\lambda, \varpi, i, \Omega)$, les constantes d'intégration sont en degrés et fractions de degré, les coefficients du temps sont en secondes de degré.

Éléments moyens de Mercure

$$a = 0.387\,098\,3098$$

$$\lambda = 252^\circ.250\,905\,52 + 5\,381\,066\,598''.200\,37\,t + 109''.259\,43\,t^2 + 0''.065\,22\,t^3 - 0''.235\,00\,t^4 - 0''.001\,79\,t^5 + 0''.000\,20\,t^6$$

$$e = 0.205\,631\,7526 + 0.000\,204\,0653\,t - 28\,349\times10^{-10}\,t^2 - 1\,805\times10^{-10}\,t^3 + 23\times10^{-10}\,t^4 - 2\times10^{-10}\,t^5$$

$$\varpi = 77^\circ.456\,119\,04 + 56\,030''.426\,45\,t + 106''.357\,16\,t^2 + 0''.034\,18\,t^3 - 0''.235\,16\,t^4 - 0''.001\,76\,t^5 + 0''.000\,20\,t^6$$

$$i = 7^\circ.004\,986\,25 + 65''.573\,01\,t - 6''.515\,16\,t^2 + 0''.201\,13\,t^3 + 0''.000\,19\,t^4 - 0''.000\,19\,t^5$$

$$\Omega = 48^\circ.330\,893\,04 + 42\,700''.014\,44\,t + 63''.149\,94\,t^2 + 0''.772\,59\,t^3 - 0''.208\,93\,t^4 - 0''.002\,19\,t^5 + 0''.000\,16\,t^6$$

$$k = 0.044\,660\,5976 - 0.054\,480\,7963\,t - 0.001\,805\,9782\,t^2 + 0.000\,663\,2523\,t^3 + 0.000\,014\,9034\,t^4 - 23\,668{\times}10^{-10}\,t^5 - 597{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$h = 0.200\,723\,3137 + 0.012\,330\,9371\,t - 0.007\,373\,3874\,t^2 - 0.000\,184\,9726\,t^3 + 0.000\,044\,5200\,t^4 + 10\,075{\times}10^{-10}\,t^5 - 1028{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$q = 0.040\,615\,6338 - 0.009\,341\,7782\,t - 0.000\,919\,2871\,t^2 + 0.000\,065\,1977\,t^3 + 37\,416{\times}10^{-10}\,t^4 - 1\,284{\times}10^{-10}\,t^5 - 67{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$p = 0.045\,635\,5046 + 0.008\,526\,5821\,t - 0.000\,955\,3697\,t^2 - 0.000\,067\,1085\,t^3 + 33\,005{\times}10^{-10}\,t^4 + 1\,711{\times}10^{-10}\,t^5 - 37{\times}10^{-10}\,t^6$$

Éléments moyens de Vénus

$$a = 0.723\,329\,8200$$

$$\lambda = 181°.979\,800\,85 + 2\,106\,691\,666''.319\,89\,t + 111''.650\,21\,t^2 + 0''.053\,68\,t^3 - 0''.235\,16\,t^4 - 0''.001\,79\,t^5 + 0''.000\,20\,t^6$$

$$e = 0.006\,771\,9164 - 0.000\,477\,6521\,t + 98\,127{\times}10^{-10}\,t^2 + 4\,639{\times}10^{-10}\,t^3 + 123{\times}10^{-10}\,t^4 - 3{\times}10^{-10}\,t^5$$

$$\varpi = 131°.563\,703\,00 + 50\,477''.470\,81\,t - 387''.425\,45\,t^2 - 20''.440\,48\,t^3 - 0''.959\,48\,t^4 + 0''.000\,44\,t^5 + 0''.000\,20\,t^6$$

$$i = 3°.394\,661\,89 + 36''.132\,61\,t - 0''.315\,23\,t^2 - 0''.025\,25\,t^3 + 0''.000\,85\,t^4 - 0''.000\,08\,t^5$$

$$\Omega = 76°.679\,920\,19 + 32\,437''.576\,36\,t + 146''.225\,86\,t^2 - 0''.334\,46\,t^3 - 0''.230\,07\,t^4 - 0''.000\,88\,t^5 + 0''.000\,09\,t^6$$

$$k = -\ 0.004\,492\,8213 - 0.000\,923\,0666\,t + 0.000\,225\,0026\,t^2 - 0.000\,001\,4513\,t^3 - 16\,810{\times}10^{-10}\,t^4 + 627{\times}10^{-10}\,t^5 + 50{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$h = 0.005\,066\,8473 - 0.001\,456\,8806\,t - 0.000\,058\,3901\,t^2 + 0.000\,022\,6090\,t^3 - 6\,041{\times}10^{-10}\,t^4 - 998{\times}10^{-10}\,t^5 + 43{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$q = 0.006\,824\,1014 - 0.004\,512\,5642\,t - 0.000\,118\,3914\,t^2 + 0.000\,017\,7623\,t^3 + 5\,244{\times}10^{-10}\,t^4 - 173{\times}10^{-10}\,t^5 - 11{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$p = 0.028\,822\,8577 + 0.001\,158\,3648\,t - 0.000\,349\,1466\,t^2 - 0.000\,008\,7743\,t^3 + 6\,535{\times}10^{-10}\,t^4 + 264{\times}10^{-10}\,t^5 - 2{\times}10^{-10}\,t^6$$

Éléments moyens de la Terre

$$a = 1.000\,001\,0178$$

$$\lambda = 100°.466\,456\,83 + 1\,296\,027\,711''.034\,29\,t + 109''.158\,09\,t^2 + 0''.072\,07\,t^3 - 0''.235\,30\,t^4 - 0''.001\,80\,t^5 + 0''.000\,20\,t^6$$

$$e = 0.016\,708\,6342 - 0.000\,420\,3654\,t - 0.000\,012\,6734\,t^2 + 1\,444{\times}10^{-10}\,t^3 - 2{\times}10^{-10}\,t^4 + 3{\times}10^{-10}\,t^5$$

$$\varpi = 102°.937\,348\,08 + 61\,900''.552\,90\,t + 164''.477\,97\,t^2 - 0''.063\,65\,t^3 - 0''.120\,90\,t^4 + 0''.002\,98\,t^5 + 0''.000\,20\,t^6$$

$$k = -\,0.003\,740\,8165 - 0.004\,792\,8949\,t + 0.000\,281\,2540\,t^2 + 0.000\,074\,0171\,t^3 - 26\,974{\times}10^{-10}\,t^4 - 3\,810{\times}10^{-10}\,t^5 + 86{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$h = 0.016\,284\,4766 - 0.001\,532\,3228\,t - 0.000\,720\,3925\,t^2 + 0.000\,032\,4712\,t^3 + 58\,589{\times}10^{-10}\,t^4 - 1\,719{\times}10^{-10}\,t^5 - 213{\times}10^{-10}\,t^6$$

Éléments moyens de Mars

$$a = 1.523\,679\,3419 + 3{\times}10^{-10}\,t$$

$$\lambda = 355^\circ.432\,999\,58 + 689\,101\,069''.330\,69\,t + 111''.786\,74\,t^2 + 0''.056\,24\,t^3 - 0''.235\,16\,t^4 - 0''.001\,80\,t^5 + 0''.000\,20\,t^6$$

$$e = 0.093\,400\,6477 + 0.000\,904\,8438\,t - 80\,641{\times}10^{-10}\,t^2 - 2\,519{\times}10^{-10}\,t^3 + 124{\times}10^{-10}\,t^4 - 10{\times}10^{-10}\,t^5$$

$$\varpi = 336^\circ.060\,233\,95 + 66\,274''.849\,90\,t + 48''.516\,10\,t^2 + 1''.931\,31\,t^3 - 0''.281\,18\,t^4 - 0''.003\,44\,t^5 + 0''.000\,20\,t^6$$

$$i = 1^\circ.849\,726\,48 - 21''.638\,85\,t + 4''.593\,50\,t^2 - 0''.023\,76\,t^3 - 0''.017\,08\,t^4 + 0''.000\,65\,t^5 + 0''.000\,05\,t^6$$

$$\Omega = 49^\circ.558\,093\,21 + 27\,792''.687\,36\,t + 5''.606\,11\,t^2 + 8''.162\,22\,t^3 - 0''.457\,09\,t^4 - 0''.047\,22\,t^5 + 0''.004\,35\,t^6$$

$$k = 0.085\,365\,6025 + 0.013\,004\,5425\,t - 0.004\,287\,0473\,t^2 - 0.000\,259\,5083\,t^3 + 0.000\,035\,4092\,t^4 + 15\,988{\times}10^{-10}\,t^5 - 1\,104{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$h = -\,0.037\,899\,7324 + 0.027\,061\,6164\,t + 0.002\,245\,4557\,t^2 - 0.000\,451\,4091\,t^3 - 0.000\,022\,6552\,t^4 + 21\,921{\times}10^{-10}\,t^5 + 959{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$q = 0.010\,470\,4257 - 0.001\,689\,2678\,t - 0.000\,082\,7820\,t^2 + 0.000\,003\,6153\,t^3 + 169{\times}10^{-10}\,t^4 + 142{\times}10^{-10}\,t^5 + 3{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$p = 0.012\,284\,4931 + 0.001\,370\,8983\,t - 0.000\,107\,3425\,t^2 - 0.000\,002\,6091\,t^3 - 231{\times}10^{-10}\,t^4 - 34{\times}10^{-10}\,t^5 + 14{\times}10^{-10}\,t^6$$

Éléments moyens de Jupiter

$$a = 5.202\,603\,2092 + 19\,132{\times}10^{-10}\,t - 39{\times}10^{-10}\,t^2 - 60{\times}10^{-10}\,t^3 - 10{\times}10^{-10}\,t^4 + 1{\times}10^{-10}\,t^5$$

$$\lambda = 34^\circ.351\,518\,74 + 109\,306\,899''.894\,53\,t + 80''.387\,00\,t^2 + 0''.133\,27\,t^3 - 0''.188\,50\,t^4 + 0''.004\,11\,t^5 - 0''.000\,14\,t^6$$

$$e = 0.048\,497\,9255 + 0.001\,632\,2542\,t - 0.000\,047\,1366\,t^2 - 20\,063{\times}10^{-10}\,t^3 + 1\,018{\times}10^{-10}\,t^4 - 21{\times}10^{-10}\,t^5 + 1{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$\varpi = 14^\circ.331\,206\,87 + 58\,054''.866\,25\,t + 370''.950\,16\,t^2 - 16''.071\,10\,t^3 + 0''.511\,86\,t^4 - 0''.022\,68\,t^5 + 0''.000\,04\,t^6$$

$$i = 1^\circ.303\,266\,98 - 197''.874\,42\,t + 1''.677\,44\,t^2 - 0''.008\,38\,t^3 - 0''.007\,35\,t^4 + 0''.000\,85\,t^5 + 0''.000\,04\,t^6$$

$$\Omega = 100°.464\,407\,02 + 36\,755''.187\,47\,t + 145''.132\,95\,t^2 + 1''.455\,56\,t^3 - 0''.596\,09\,t^4 - 0''.043\,24\,t^5 + 0''.001\,75\,t^6$$

$$k = 0.046\,985\,7457 - 0.001\,796\,9926\,t - 0.002\,042\,0604\,t^2 - 0.000\,040\,2595\,t^3 + 0.000\,016\,8641\,t^4 + 6\,000{\times}10^{-10}\,t^5 - 623{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$h = 0.012\,003\,8766 + 0.013\,628\,5825\,t + 0.000\,042\,5103\,t^2 - 0.000\,210\,8419\,t^3 - 0.000\,006\,1928\,t^4 + 11\,097{\times}10^{-10}\,t^5 + 444{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$q = -\,0.002\,065\,6001 - 0.001\,905\,7660\,t + 0.000\,108\,2507\,t^2 + 0.000\,008\,9680\,t^3 - 3\,638{\times}10^{-10}\,t^4 - 117{\times}10^{-10}\,t^5 - 7{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$p = 0.011\,183\,7479 - 0.000\,839\,7312\,t - 0.000\,159\,4973\,t^2 + 0.000\,007\,9342\,t^3 + 3\,790{\times}10^{-10}\,t^4 - 67{\times}10^{-10}\,t^5 - 1{\times}10^{-10}\,t^6$$

Éléments moyens de Saturne

$$a = 9.554\,909\,1915 - 0.000\,021\,3896\,t + 444{\times}10^{-10}\,t^2 + 670{\times}10^{-10}\,t^3 + 110{\times}10^{-10}\,t^4 - 7{\times}10^{-10}\,t^5 - 1{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$\lambda = 50°.077\,444\,30 + 44\,046\,398''.470\,38\,t + 186''.868\,17\,t^2 - 0''.107\,48\,t^3 - 0''.350\,04\,t^4 - 0''.016\,30\,t^5 + 0''.001\,03\,t^6$$

$$e = 0.055\,548\,1426 - 0.003\,466\,4062\,t - 0.000\,064\,3639\,t^2 + 33\,956{\times}10^{-10}\,t^3 - 219{\times}10^{-10}\,t^4 - 3{\times}10^{-10}\,t^5 + 6{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$\varpi = 93°.057\,237\,48 + 70\,695''.407\,45\,t + 301''.511\,55\,t^2 + 17''.741\,74\,t^3 + 0''.996\,28\,t^4 + 0''.101\,32\,t^5 + 0''.007\,22\,t^6$$

$$i = 2°.488\,878\,78 - 134''.503\,88\,t - 5''.468\,00\,t^2 + 0''.311\,68\,t^3 + 0''.032\,07\,t^4 - 0''.002\,37\,t^5 - 0''.000\,23\,t^6$$

$$\Omega = 113°.665\,502\,52 + 31\,575''.168\,75\,t - 43''.833\,21\,t^2 - 8''.095\,20\,t^3 + 0''.184\,33\,t^4 + 0''.068\,67\,t^5 - 0''.002\,76\,t^6$$

$$k = -\,0.002\,959\,9926 - 0.018\,813\,0068\,t + 0.001\,283\,2568\,t^2 + 0.000\,384\,7521\,t^3 - 0.000\,021\,4188\,t^4 - 25\,250{\times}10^{-10}\,t^5 + 1\,149{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$h = 0.055\,429\,6096 - 0.004\,477\,7281\,t - 0.003\,261\,0492\,t^2 + 0.000\,200\,0704\,t^3 + 0.000\,034\,6305\,t^4 - 17\,436{\times}10^{-10}\,t^5 - 1\,558{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$q = -\,0.008\,717\,4677 - 0.002\,914\,1582\,t + 0.000\,157\,3853\,t^2 + 0.000\,012\,3470\,t^3 - 7\,068{\times}10^{-10}\,t^4 - 347{\times}10^{-10}\,t^5 + 38{\times}10^{-10}\,t^6$$

$$p = 0.019\,891\,4760 - 0.001\,633\,0327\,t - 0.000\,223\,3181\,t^2 + 0.000\,011\,1755\,t^3 + 6\,174{\times}10^{-10}\,t^4 - 482{\times}10^{-10}\,t^5 - 24{\times}10^{-10}\,t^6$$

Éléments moyens d'Uranus

$$a = 19.218\,446\,0618 - 3\,716{\times}10^{-10}\,t + 979{\times}10^{-10}\,t^2$$

$$\lambda = 314°.055\,005\,11 + 15\,475\,106''.019\,61\,t + 109''.402\,72\,t^2 + 0''.094\,74\,t^3 - 0''.235\,21\,t^4 - 0''.001\,80\,t^5 + 0''.000\,20\,t^6$$
$$e = 0.046\,381\,2221 - 0.000\,272\,9293\,t + 0.000\,007\,8913\,t^2 + 2\,447\times10^{-10}\,t^3 - 171\times10^{-10}\,t^4$$
$$\varpi = 173°.005\,291\,06 + 53\,509''.642\,66\,t + 77''.060\,68\,t^2 + 1''.562\,27\,t^3 - 0''.169\,21\,t^4 - 0''.001\,80\,t^5 + 0''.000\,20\,t^6$$
$$i = 0°.773\,196\,89 + 27''.878\,45\,t + 13''.495\,29\,t^2 - 0''.330\,95\,t^3 - 0''.034\,44\,t^4 + 0''.001\,71\,t^5 + 0''.000\,12\,t^6$$
$$\Omega = 74°.005\,957\,01 + 18\,760''.599\,02\,t + 482''.210\,68\,t^2 + 66''.542\,69\,t^3 - 3''.524\,90\,t^4 - 0''.328\,19\,t^5 + 0''.030\,56\,t^6$$
$$k = -\,0.045\,951\,3238 - 0.001\,191\,2655\,t + 0.001\,544\,9434\,t^2 + 0.000\,011\,2035\,t^3 - 83\,536\times10^{-10}\,t^4 - 513\times10^{-10}\,t^5 + 165\times10^{-10}\,t^6$$
$$h = 0.005\,637\,9131 - 0.011\,954\,0733\,t - 0.000\,135\,5308\,t^2 + 0.000\,132\,0336\,t^3 + 7\,849\times10^{-10}\,t^4 - 4\,140\times10^{-10}\,t^5 - 33\times10^{-10}\,t^6$$
$$q = 0.001\,859\,1508 - 0.000\,571\,3216\,t - 0.000\,019\,7484\,t^2 - 49\,846\times10^{-10}\,t^3 + 391\times10^{-10}\,t^4 + 267\times10^{-10}\,t^5 + 3\times10^{-10}\,t^6$$
$$p = 0.006\,486\,1701 + 0.000\,234\,0588\,t + 0.000\,010\,6579\,t^2 - 11\,892\times10^{-10}\,t^3 - 4\,589\times10^{-10}\,t^4 - 14\times10^{-10}\,t^5 + 12\times10^{-10}\,t^6$$

Éléments moyens de Neptune

$$a = 30.110\,386\,8694 - 16\,635\times10^{-10}\,t + 686\times10^{-10}\,t^2$$
$$\lambda = 304°.348\,665\,48 + 7\,915\,799''.132\,77\,t + 111''.175\,36\,t^2 + 0''.064\,68\,t^3 - 0''.235\,14\,t^4 - 0''.001\,80\,t^5 + 0''.000\,20\,t^6$$
$$e = 0.009\,455\,7470 + 0.000\,060\,3263\,t + 0\,t^2 - 483\times10^{-10}\,t^3$$
$$\varpi = 48°.120\,275\,54 + 51\,346''.644\,45\,t + 138''.361\,49\,t^2 + 0''.073\,63\,t^3 - 0''.235\,14\,t^4 - 0''.001\,80\,t^5 + 0''.000\,20\,t^6$$
$$i = 1°.769\,952\,59 - 335''.094\,12\,t - 2''.549\,91\,t^2 + 0''.098\,45\,t^3 + 0''.001\,01\,t^4 - 0''.000\,05\,t^5 - 0''.000\,01\,t^6$$
$$\Omega = 131°.784\,057\,02 + 39\,679''.341\,59\,t + 93''.427\,73\,t^2 - 2''.293\,23\,t^3 - 0''.339\,48\,t^4 - 0''.004\,79\,t^5 - 0''.000\,06\,t^6$$
$$k = 0.005\,999\,7757 - 0.001\,623\,1779\,t - 0.000\,202\,2477\,t^2 + 0.000\,014\,8438\,t^3 + 12\,298\times10^{-10}\,t^4 - 323\times10^{-10}\,t^5 - 33\times10^{-10}\,t^6$$
$$h = 0.006\,692\,4241 + 0.001\,541\,2377\,t - 0.000\,192\,8011\,t^2 - 0.000\,018\,0270\,t^3 + 8\,157\times10^{-10}\,t^4 + 686\times10^{-10}\,t^5 - 8\times10^{-10}\,t^6$$
$$q = -\,0.010\,291\,4782 - 0.001\,674\,3192\,t + 0.000\,305\,8350\,t^2 + 56\,782\times10^{-10}\,t^3 - 13\,752\times10^{-10}\,t^4 - 133\times10^{-10}\,t^5 + 25\times10^{-10}\,t^6$$
$$p = 0.011\,516\,8399 - 0.002\,585\,4022\,t - 0.000\,118\,2648\,t^2 + 237\,436\times10^{-10}\,t^3 + 2\,469\times10^{-10}\,t^4 - 639\times10^{-10}\,t^5 - 9\times10^{-10}\,t^6$$

8.2. LA LUNE

8.2.1. Historique

8.2.1.1. De 1760 à 1861

De 1760 à l'an XIII (23 septembre 1804-22 septembre 1805), les éphémérides de la Lune publiées dans la *Connaissance des Temps* sont basées sur plusieurs versions successives des tables de Tobias Mayer dont la dernière contient des améliorations dues à Mason (Mayer, 1761 ; Lalande, 1771 et 1792). De l'an XIV (23 septembre 1805-22 septembre 1806) à 1816, elles sont basées sur les tables de Bürg (1806) et de 1817 à 1861 sur les tables de Burckhardt (1812), établies au Bureau des longitudes.

Jusqu'en 1834, l'argument des éphémérides de la Lune de la *Connaissance des Temps* est le temps solaire vrai de Paris qui se déduit du temps solaire vrai d'un autre lieu par addition d'une constante. Le temps solaire moyen d'un lieu se déduit du temps solaire vrai du même lieu par addition de l'*équation du temps* que les utilisateurs peuvent calculer par interpolation à partir de la colonne "Temps moyen au midi vrai de Paris". À partir de 1835, l'argument des éphémérides de la Lune devient le temps solaire moyen de Paris qui restera en usage jusqu'en 1915. De 1916 à 1924, il sera remplacé par le temps solaire moyen de Greenwich, puis de 1925 à 1959 par le temps civil de Greenwich (temps solaire moyen +12 h) ou Temps universel TU.

Il est important de remarquer que les tables de Mayer, aussi bien que celles de Bürg et de Burckhardt, sont construites par ajustement direct sur les observations des coefficients d'un petit nombre de termes trigonométriques dont la forme des arguments est fournie par la théorie. En particulier, les tables de Bürg et celles de Burckhardt introduisent dans la longitude un terme d'amplitude $15''$, en $\sin(\varpi + 2\Omega - 3\varpi')$ dans les premières et $\cos(\varpi + 2\Omega)$ dans les secondes, dont les arguments (où ϖ et ϖ' désignent les longitudes des périgées de la Lune et du Soleil et Ω la longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique) proviennent des travaux de Laplace, bien que ce dernier ait montré ultérieurement par la théorie que l'amplitude de ces termes devait être considérablement plus petite (Laplace, 1825). Les moyens mouvements, non seulement celui de la longitude moyenne, mais aussi ceux des longitudes du nœud et du périgée, sont issus de l'observation. Il en est de même, dans les tables de Mayer, pour l'accélération séculaire de la longitude moyenne, découverte par Halley. Toutefois, dans la dernière décennie de la période d'utilisation des tables de Mayer, lorsque les calculs ne sont pas effectués d'après le *Nautical Almanac*, on introduit dans la *Connaissance des Temps* une valeur théorique de cette accélération séculaire de la longitude moyenne, puis dans les toutes dernières années de cette décennie, des quantités analogues pour les longitudes du nœud et du périgée. Ces valeurs théoriques, issues des travaux de Laplace (1788a et 1799), subsistent avec des valeurs des constantes légèrement modifiées dans les tables de Bürg et de Burckhardt.

Notons ici que les accélérations séculaires de Laplace ne tiennent compte que de la contribution des variations séculaires de l'excentricité de l'orbite terrestre. Celle de la longitude moyenne (Table 8.2.1), réduite à son terme du premier ordre en fonction du rapport des moyens mouvements de la Terre et de la Lune, est très différente de la contribution complète de l'excentricité de la Terre comme le montre la table 8.2.6 (perturbations planétaires indirectes). Laplace obtenait néanmoins un bon accord avec les observations anciennes d'où il concluait, à tort, à l'uniformité du temps solaire moyen dans lequel sont datées les observations, la théorie étant par définition rapportée à un temps uniforme (Laplace, 1825).

8.2.1.2. De 1862 à 1914

C'est à partir de 1862, avec l'introduction des tables de Hansen (1857), que des éphémérides véritablement basées sur une théorie apparaissent dans la *Connaissance des Temps*. Les tables de Hansen sont utilisées jusqu'en 1914, mais l'une d'elles, qui ne fournit qu'une petite contribution, est remplacée au cours de la période par une table due à Newcomb. Il faut noter également que les corrections journalières en ascension droite et en déclinaison résultant de la correction en longitude proposée par Newcomb (1878) sont données dans un tableau séparé et introduites dans certains calculs (éclipses, occultations, distances de la Lune au Soleil et aux étoiles) à partir de 1882.

Pour l'élaboration de ses tables à partir de sa théorie, Hansen n'a ajusté sur les observations, en dehors des constantes d'intégration, que les moyens mouvements du nœud et du périgée, le coefficient de l'inégalité parallactique (pour fixer le rapport des distances moyennes Terre-Lune et Terre-Soleil), le coefficient des deux principales perturbations dues à la non sphéricité de la Terre, l'une en longitude, l'autre en latitude, et enfin la valeur $21''.47$ du coefficient de la perturbation planétaire à longue période en $\sin(8Ve - 13Te + 274°14')$ où Ve et Te désignent les longitudes moyennes de Vénus et de la Terre.

Hansen n'introduit dans ses tables que deux perturbations planétaires à longue période ; la seconde, d'argument $18Ve - 16Te - l$ où l désigne l'anomalie moyenne de la Lune, provient entièrement de sa théorie.

Les accélérations séculaires de la longitude moyenne et des longitudes du nœud et du périgée sont déduites de la théorie en ne tenant compte, comme chez Laplace, que de la contribution de la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite terrestre. Hansen introduit néanmoins des termes d'ordre supérieur en fonction du rapport des moyens mouvements de la Terre et de la Lune mais ceux-ci sont faux comme le montreront Adams (1853) puis Delaunay (1862b). Hansen lui même reconnaîtra son erreur, mais après la parution de ses tables. Par ailleurs, Delaunay (1863 et 1862a) calcule des expressions analytiques des deux inégalités à longue période en $8Ve - 13Te$ et $18Ve - 16Te - l$ introduites dans les tables de Hansen. Pour la seconde inégalité, la valeur du coefficient de Hansen, issue de sa théorie, est confirmée mais Delaunay montre que le coefficient de la première inégalité ajusté par Hansen sur les observations est considérablement plus grand (avec un facteur de l'ordre de 100) que la valeur fournie par la théorie.

C'est à la suite des travaux d'Adams puis de Delaunay que la non uniformité du temps solaire moyen, et par suite de la rotation de la Terre, apparaît comme une hypothèse possible. Cette possiblité avait été écartée par Laplace, comme nous l'avons vu plus haut.

La correction à la longitude des tables de Hansen proposée par Newcomb (1878) est purement empirique. Elle résulte d'une comparaison des tables de Hansen à des observations anciennes et modernes. Elle modifie les valeurs du terme constant de la longitude moyenne, de son moyen mouvement et de son accélération séculaire. Elle supprime le terme d'argument $8Ve - 13Te$, dont le coefficient avait été déterminé empiriquement par Hansen, et le remplace par un nouveau terme empirique $-15''.49\cos(18Ve - 16Te - l) - 0''.09\sin(18Ve - 16Te - l)$, qui s'ajoute au terme de même argument issu de la théorie de Hansen.

8.2.1.3. De 1915 à 1925

De 1915 à 1925, l'éphéméride de la Lune publiée dans la *Connaissance des Temps* est calculée à partir des tables de Radau (1911) établies sous la direction du Bureau des longitudes. En même temps, on fournit les différences journalières avec l'éphéméride issue des tables de Hansen et de la correction de Newcomb (1878) jusqu'en 1922 puis avec l'éphéméride issue des tables de Brown.

Les tables de Radau sont fondées sur la théorie de Delaunay (1860 et 1867) pour le problème principal, sur les travaux de Radau (1895) pour les perturbations planétaires et sur les travaux de Hill (1891) pour les perturbations dues à la forme de la Terre. De plus, les accélérations séculaires des longitudes du nœud et du périgée sont empruntées à la théorie de Brown. Les moyens mouvements du nœud et du périgée de la théorie sont remplacés par les valeurs déduites de l'observation par Hansen.

Les rapports des moyens mouvements et des demi-grands axes de la Lune et de la Terre, les excentricités de la Lune et de la Terre, l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique et le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre sont associés aux constantes m, γ, e, e', α (*cf.* 8.2.2.4) qui interviennent sous forme littérale dans les coefficients de la théorie de Delaunay. Les valeurs de ces constantes ne sont pas obtenues par ajustement de la théorie sur les observations mais choisies en fonction des valeurs les plus précises connues à l'époque. Les valeurs à l'origine des longitudes moyennes du nœud et du périgée sont issues des valeurs des tables de Hansen. Les éléments de la partie séculaire de la longitude moyenne (terme constant, moyen mouvement, accélération séculaire) résultent d'une comparaison de la théorie à des observations couvrant la période [– 687, 1910] faite par Radau. À la suite de cette comparaison, Radau introduit dans la longitude deux termes empiriques $11''.5\cos[1^\circ.37(\theta - 1790.5)] + 3''.3\cos[5^\circ.55(\theta - 1856.5)]$ où θ est la date en années juliennes.

8.2.1.4. De 1926 à 1959

De 1926 à 1979 année du dernier volume sous forme traditionnelle, les calculs relatifs à l'éphéméride de la Lune ne sont plus effectués au Bureau des longitudes mais fournis par le Nautical Almanac Office. L'éphéméride de la *Connaissance des Temps* est donc identique aux éphémérides publiées par *The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris* et *The American Ephemeris and Nautical Almanac.*

De 1926 à 1959, les éphémérides de la Lune sont calculées d'après les tables de Brown (1919). Les tables de Brown sont construites d'après la théorie du même auteur (1899a à 1908b). Les accélérations séculaires de la longitude moyenne et des longitudes du nœud et du périgée proviennent de la théorie.

Les constantes d'intégration ont été déterminées par Brown (1915) par comparaison de sa théorie à l'observation. Les autres constantes introduites dans la théorie sont choisies parmi les constantes les plus précises de l'époque sauf l'aplatissement terrestre corrigé par Brown lui-même. Les moyens mouvements du nœud et du périgée de la théorie sont remplacés par des valeurs issues de la comparaison à l'observation. De plus, Brown ajoute à la longitude moyenne le terme empirique $10''.71\sin[1^\circ.40(\theta - 1850) + 170^\circ.7]$. Les trois constantes du terme empirique ainsi que la longitude moyenne à l'origine et le moyen mouvement tropique sont obtenus par ajustement, sur la dernière expression obtenue par Newcomb (1909), de l'ensemble "partie séculaire de la longitude moyenne + terme empirique", pendant la période [1724, 1928]. Cet ajustement est rendu nécessaire par l'utilisation par Brown d'une accélération séculaire différente de celle de Newcomb.

En 1927, De Sitter, se basant sur les travaux de Fotheringham, propose une correction empirique de $5''.22$/siècle^2 au terme quadratique (théorique) de la longitude moyenne des tables de Brown. En 1939, Spencer Jones, à la suite des travaux de De Sitter, compare aux observations les théories de Newcomb pour le Soleil, Mercure et Vénus et les tables de Brown pour la Lune, après avoir dépouillé ces dernières du terme empirique et corrigé la partie séculaire de la longitude moyenne pour tenir compte de l'accélération complémentaire de De Sitter. Il met en évidence non seulement la non uniformité du temps solaire moyen, cause d'irrégularités apparentes dans les mouvements des quatre corps, mais aussi l'existence d'une accélération supplémentaire, propre à la Lune, produite par les forces de marées dans la longitude moyenne. On déduit facilement des expressions de Spencer Jones la valeur $-11''.22$/siècle^2 pour cette accélération.

À la lumière des travaux de Spencer Jones, les termes empiriques à longue période introduits dans les tables citées plus haut, y compris les termes d'arguments $\varpi + 2\Omega - 3\varpi'$ et $\varpi + 2\Omega$ dans les tables de Bürg et de Burckhardt, apparaissent comme destinés à compenser une part des irrégularités du temps solaire moyen sur la période de comparaison de la théorie aux observations. Une autre part de ces irrégularités est compensée par l'ignorance de l'accélération de marées, des erreurs ou par l'introduction d'une accélération séculaire empirique.

8.2.1.5. De 1960 à nos jours

En 1952, l'Union Astronomique Internationale (UAI, 1954), à la suite de la conférence de Paris sur les constantes astronomiques en 1950, recommande l'introduction du Temps des éphémérides à la place du Temps universel comme argument de la plupart des éphémérides, en particulier celles de la Lune. Pour tenir compte de cette résolution, les tables de Brown sont modifiées en éliminant le terme empirique et en appliquant à la longitude moyenne la correction $-8''.72-26''.74\,T-11''.22\,T^2$, T étant compté en siècles juliens à partir de 1900, janvier 0 à midi moyen de Greenwich. Le Temps des éphémérides étant en pratique défini comme le temps de la théorie du Soleil de Newcomb, cette correction s'écrit $\Delta L_B-(\nu/n')\Delta L_N$ où ΔL_B et ΔL_N sont respectivement les corrections qu'il faut ajouter à la longitude des tables de Brown dépouillées du terme empirique et à la longitude des tables de Newcomb du Soleil pour les ajuster sur les observations datées en Temps universel. Dans cette formule, ν/n' est le rapport des moyens mouvements de la Lune et de la Terre, ΔL_B et ΔL_N les expressions fournies par Spencer Jones. L'UAI recommande également une petite correction $0''.018\cos(l-2D)+0''.007\cos 2D$ à la longitude apparente et surtout que les éphémérides soient calculées directement à partir des séries de Brown et non plus à partir des tables.

Les recommandations de l'UAI 1952 sont prises en compte à partir du volume de 1960. Les éphémérides sont calculées à partir des séries de Brown en longitude, latitude et parallaxe, en y introduisant les valeurs des constantes fondamentales utilisées par Brown dans ses tables et les corrections prescrites par l'UAI. Les séries et les méthodes de calcul sont données dans les *Improved Lunar Ephemeris 1952-1959* par Eckert et al. (1954). L'éphéméride ainsi obtenue porte le nom de ILE, j=0.

À partir de 1968, on introduit le nouveau système de constantes recommandé par l'UAI en 1964 (UAI, 1966) et on corrige de $-0''.072$ le coefficient du terme d'argument $2l-2F$ de la longitude.

L'éphéméride ainsi constituée porte le nom de ILE, j=1. On trouve le détail des corrections qui font passer de ILE, j=0 à ILE, j=1 dans *The American Ephemeris and Nautical Almanac* pour 1968.

À partir de 1972, l'éphéméride ILE, j=1 est remplacée par l'éphéméride ILE, j=2 obtenue en remplaçant les séries des perturbations solaires en longitude, latitude et parallaxe calculées par Brown par les séries calculées par Eckert et al. (1966) directement à partir des séries en coordonnées rectangulaires de Brown. L'éphéméride ILE, j=2 est utilisée dans la *Connaissance des Temps* jusqu'en 1983, les calculs étant à nouveau effectués au Bureau des longitudes à partir du premier volume de la nouvelle série en 1979.

En 1976, l'UAI prescrit l'introduction dans les éphémérides à partir de 1984 d'un nouveau système de constantes et d'une nouvelle échelle de temps (UAI, 1978).

Depuis 1984, l'éphéméride de la Lune publiée dans la *Connaissance des Temps* est calculée à partir de l'éphéméride ELP 2000 (Chapront-Touzé et Chapront, 1983) issue de la théorie ELP 2000–82 construite au Bureau des longitudes et ajustée sur l'intégration numérique DE200/LE200 du JPL. Depuis 1989, les éléments moyens publiés dans la *Connaissance des Temps* sont issus de la solution ELP 2000–85 (Chapront-Touzé et Chapront, 1988). Ils contiennent en particulier des puissances 3 et 4 du temps absentes dans ELP 2000–82. Les coefficients des puissances 2 du temps diffèrent également légèrement dans les deux solutions. L'éphéméride ELP 2000 sera décrite plus loin.

8.2.1.6. Évolution de la précision

Nous donnons dans la table 8.2.1 l'évolution du terme proportionnel au carré du temps (parfois confondu avec l'accélération séculaire dont il est en réalité la moitié) dans la longitude moyenne tropique de la Lune. Ce terme contient donc le terme quadratique de la précession. L'origine des temps utilisée par les différents auteurs est également donnée. Il faut bien remarquer que, de fait, l'argument temps n'est uniforme que pour les deux dernières colonnes de la table. Pour les autres colonnes, l'argument temps est le temps solaire moyen. La valeur (2) de Laplace, arrondie à $10''$, est la valeur utilisée dans les tables de Bürg et de Burckhardt (Tisserand, 1894).

Il est difficile de décrire l'évolution de la précision des éphémérides publiées, d'autant plus que cette précision se dégrade à mesure que l'on s'écarte de l'époque moyenne des tables ou des solutions, c'est-à-dire de l'époque moyenne des observations sur lesquelles elles ont été ajustées. Cette dégradation est due à l'introduction de termes empiriques avant 1960 puis à l'incertitude sur l'accélération de marées après cette date. Il semble d'après Lalande (1792), que l'erreur maximale en longitude soit passée de $2'$ à $30''$ au cours de la période d'utilisation des tables de Mayer. D'après une comparaison à des observations publiée dans la *Connaissance des Temps* pour 1816, il semble que la précision moyenne des tables de Bürg et des tables de Burckhardt au début de leur période d'utilisation ait été de $5''$ à $7''$ mais cette précision s'est dégradée au cours du temps. D'après Radau (1911), l'erreur maximale des tables de Hansen est inférieure à $3''$ jusqu'en 1866 mais se dégrade jusqu'à $25''$ en 1910, l'erreur des tables de Radau étant inférieure à $2''$ sur cette période. D'après Francou et al. (1983), la différence en valeur absolue entre l'éphéméride ILE, j=2 et ELP 2000 varie de $0''$ à $0''.75$ sur la période [1978, 1984], l'erreur en longitude de ELP 2000 étant inférieure à $0''.020$ sur cette période.

Table 8.2.1. Évolution du terme quadratique dans la longitude moyenne tropique de la Lune. L'unité est la seconde de degré par siècle carré ($''$/siècle^2).

	Mayer		Laplace		Hansen	Newcomb	Radau	Brown	ILE	ELP
	(1)	(2)	(1)	(2)						
Valeur	6.7	9	11.135	10.18	13.301	9.44	8.841	7.14	−4.08	−4.7763
Origine	1700	1700	1700	1700	1800	1800	1850	1900	1900	2000
Théorique ou Observée	O	O	T	T	T	O	O	T	T/O	T

8.2.2. Remarques générales sur les solutions du mouvement orbital de la Lune

8.2.2.1. Les différentes attractions

La construction d'une solution du mouvement orbital de la Lune est un problème complexe. En effet, si la Lune est soumise en premier lieu à l'attraction terrestre, elle est soumise également à l'attraction du Soleil et à celle d'autres corps du système solaire, essentiellement les planètes. D'autre part, compte tenu de la proximité des corps, les interactions du couple Terre-Lune, même du seul point de vue des mouvements orbitaux, ne peuvent être réduites aux seules actions des centres de gravité. Les forces dues à la non sphéricité de la Lune et de la Terre et celles dues aux marées ont un effet sur le mouvement orbital lunaire. Ces forces s'expriment en fonction des coordonnées de la Lune rapportées à des repères fixes par rapport aux corps agissants. Le passage de ces repères au repère de référence dans lequel sont intégrées les équations fait donc intervenir les mouvements de la Terre et de la Lune par rapport à leurs centres de gravité.

Dans la pratique, pour le potentiel terrestre et pour les forces de marées, on utilise des modèles simplifiés qui ne font pas intervenir la rotation terrestre. Le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité n'intervient donc que par le mouvement du plan de l'équateur. Comme ce potentiel terrestre et ces forces de marées ont en facteur des petits paramètres et ne donnent lieu à aucune résonance, les angles fixant la position du plan de l'équateur peuvent être réduits aux angles de précession-nutation en longitude et en obliquité et considérés comme des fonctions connues du temps. Une simplification semblable n'est pas possible pour le mouvement de la Lune autour de son centre de gravité (*libration*) car les harmoniques tesséraux d'ordre 3 du potentiel lunaire, qui ne peuvent être négligés dans une solution précise, donnent lieu à des effets résonants avec la libration.

Par suite du principe de l'action et de la réaction, les corps du système solaire sont également soumis à l'action de la Lune. Dans la pratique, ces corps sont suffisamment éloignés du couple Terre-Lune pour que seule l'action du barycentre du couple soit sensible. Par contre, l'action de la Lune sur le barycentre Terre-Lune n'est pas négligeable mais peut être réduite à l'action du centre de gravité.

Dans un repère galiléen, en coordonnées rectangulaires, les trois équations différentielles d'ordre 2 pour le mouvement orbital de la Lune sont donc de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = X_i(x_j, \xi_k^n, \phi_l, t)$$

avec : $i = 1, \ldots, 3$, $j = 1, \ldots, 3$, $n = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, 3$, $l = 1, \ldots, 3$. Dans ces équations, t est le temps, les x_j représentent les coordonnées rectangulaires du vecteur Terre-Lune, les ξ_k^n les coordonnées de la planète n rapportées au Soleil, le barycentre du système Terre-Lune correspondant à $n = 3$, les ϕ_l les trois angles d'Euler fixant la position du repère lié à la Lune par rapport à un repère galiléen et N le nombre de planètes prises en compte, essentiellement Mercure, Vénus, le barycentre Terre-Lune, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et éventuellement Pluton et quelques petites planètes. Ces équations font partie d'un système de $3N + 6$ équations différentielles d'ordre 2 comprenant en outre les équations différentielles relatives aux ξ_i^n et aux ϕ_i. Compte tenu des simplifications annoncées, les seconds membres des équations en ξ_i^3 contiennent les variables x_j et ξ_k^n, ceux des autres équations en ξ_i^p ($p = 1, 2, 4, \ldots, N$) ne contiennent que les ξ_k^n et les seconds membres des équations en ϕ_i contiennent les x_j, les ξ_k^n et les ϕ_l et leurs dérivées premières.

8.2.2.2. Méthodes analytiques et intégration numérique

Pour obtenir des solutions très précises des mouvements orbitaux de la Lune, des planètes et du mouvement de la Lune autour de son centre de gravité, l'intégration simultanée du système est en principe indispensable. De nos jours, deux méthodes sont utilisées concurremment pour réaliser cette intégration : l'intégration numérique et la méthode analytique.

Les intégrations numériques les plus précises comme les intégrations numériques du JPL, DE102/LE51 (Newhall et al., 1983) et DE200/LE200 (Standish, 1986 et 1990), intègrent effectivement les $3N + 6$ équations simultanément. En méthode analytique, il est possible, en procédant par approximations successives, de réaliser aux différents stades de l'intégration une séparation entre les trois problèmes : mouvement des planètes, mouvement orbital lunaire, libration.

Les solutions analytiques représentent les coordonnées sous forme de séries de Fourier et de Poisson, fonctions d'un nombre restreint d'arguments, tronquées selon des critères qui varient avec les solutions. Le nombre de termes de ces séries tronquées croît considérablement avec la précision de la solution, ce qui a pour effet, dans la pratique, de limiter cette dernière. En effet, même sur des ordinateurs de très grande capacité, le nombre de termes des séries tronquées ne peut être augmenté indéfiniment. De plus, l'évaluation de séries tronquées comportant un très grand nombre de termes est très long même si des méthodes numériques permettent de diminuer le temps nécessaire au calcul d'un très grand nombre de positions, par exemple pour le calcul d'une éphéméride annuelle. Enfin, dans l'évaluation d'une somme d'un très grand nombre de termes il y a accumulation des erreurs d'arrondi de l'ordinateur donc perte de précision.

Les intégrations numériques fournissent des valeurs des coordonnées du corps et des composantes de sa vitesse à des instants également espacés sur un intervalle de temps fixé. L'accumulation des erreurs d'arrondi de l'ordinateur provoque cette fois une dégradation de la solution avec la longueur de l'intervalle de temps couvert, ou plus exactement avec le nombre de périodes orbitales du corps le plus rapide.

C'est pourquoi, en supposant parfaites les constantes introduites ou ajustées, l'intégration numérique peut fournir actuellement des solutions plus précises que la méthode analytique sur un intervalle de temps de quelques siècles pour la Lune, mais la précision des deux types de solutions devient comparable pour des intervalles de temps de quelques milliers d'années. Il faut noter que, pour la Lune, l'intégration numérique couvrant l'intervalle de temps le plus long, [– 1410, 3002], est actuellement DE102/LE51. En dehors de cette période, seules des solutions analytiques peuvent être utilisées.

8.2.2.3. Les différentes étapes en méthode analytique

Pour le mouvement orbital de la Lune, chaque second membre X_i est la somme d'une partie X_i^c, due à l'attraction par le centre de masse de la Terre et aux perturbations solaires dans le cadre de la mécanique newtonienne, et d'une partie X_i^p due aux autres effets. X_i^c ne dépend que des composantes du vecteur Terre-Lune et des coordonnées héliocentriques du barycentre Terre-Lune. X_i^p est une somme de termes ayant en facteur des petits paramètres tels que les rapports des masses des planètes à la masse du Soleil, les coefficients des potentiels de la Terre et de la Lune...

On considère le problème fictif dit *problème principal* ou *problème central* obtenu en négligeant la partie X_i^p et en remplaçant dans X_i^c les coordonnées héliocentriques du barycentre Terre-Lune par les coordonnées d'un mouvement képlérien voisin. Le problème principal peut être intégré séparément et constitue une première approximation L_1 du mouvement de la Lune.

Dans les équations relatives à la libration, chaque second membre est la somme d'une partie ne dépendant que des ϕ_l et de leurs dérivées premières, des x_j et des ξ_k^3 et de parties ayant en facteur les rapports des masses des planètes au Soleil ou les coefficients du potentiel terrestre. En remplaçant les x_j par les expressions du problème principal et les ξ_k^3 par des coordonnées képlériennes dans la première partie et en négligeant les autres parties, on obtient une première approximation G_1 du mouvement autour du centre de gravité, appelée également *problème principal de la libration*, qui peut être intégrée séparément.

Dans les seconds membres des équations relatives au barycentre Terre-Lune, la partie qui contient les coordonnées du vecteur Terre-Lune a en facteur un petit paramètre d'ordre inférieur aux petits paramètres principaux de la théorie des planètes que sont les rapports des masses des planètes à la masse solaire. On obtient un système séparé, pour les planètes, en remplaçant les x_j par la solution L_1. Soit P_1 la solution de ce système.

La seconde approximation de la théorie de la Lune consiste à remplacer les coordonnées des planètes, y compris celles du barycentre Terre-Lune, par la solution P_1 et les angles ϕ_l par la solution G_1 dans les seconds membres lunaires. On obtient ainsi un nouveau système séparé dont la solution est L_2. En substituant P_1 et L_2 dans les seconds membres des équations de la libration, on obtient un nouveau système séparé pour le mouvement autour du centre de gravité dont la solution sera G_2. De même en substituant L_2 dans les seconds membres des équations relatives au barycentre Terre-Lune, on améliore la théorie des planètes. Ce processus peut être répété.

8.2.2.4. Le problème principal

Le problème principal contient les plus grosses inégalités du mouvement orbital de la Lune.

Dans la mesure où le mouvement des nœuds et du périgée de la Lune est rapide (périodes 19 ans et 9 ans), on recherche, en coordonnées rectangulaires, pour le problème principal des solutions “sans termes séculaires”, c'est-à-dire sous forme de séries de Fourier tronquées.

Le mouvement relatif du Soleil autour du barycentre Terre-Lune étant supposé képlérien, il est commode de considérer le système de référence géocentrique défini par les directions, supposées fixes, du plan et du périastre de ce mouvement. Dans un tel référentiel, la solution du problème central en coordonnées rectangulaires ne dépend que de quatre arguments fondamentaux, trois liés à la Lune et un au Soleil, ces angles étant eux-mêmes des fonctions linéaires du temps augmentées éventuellement de termes trigonométriques. La théorie fournit les coefficients des séries de Fourier et les coefficients du temps (et éventuellement les termes trigonométriques) dans les arguments fondamentaux, en fonction de constantes d'intégration et d'autres constantes.

Pour les théories introduites dans la *Connaissance des Temps* depuis la théorie de Delaunay (1860, 1867), les arguments fondamentaux du problème principal sont :

- D, la différence des parties séculaires des longitudes moyennes de la Lune et du Soleil,
- F, la différence des parties séculaires de la longitude moyenne de la Lune et de la longitude de son nœud ascendant,
- l, la partie séculaire de l'anomalie moyenne de la Lune qui est aussi la différence des parties séculaires de la longitude moyenne de la Lune et de la longitude de son périgée,
- l', la partie séculaire de l'anomalie moyenne du Soleil.

Ce sont des fonctions linéaires du temps.

Lorsque l'origine n'est plus la direction du périastre du Soleil mais un équinoxe fixe, il apparaît un cinquième argument fondamental, w_1, fonction linéaire du temps, qui est la partie séculaire de la longitude moyenne de la Lune rapportée à l'équinoxe fixe. En coordonnées polaires, la longitude est alors la somme de w_1 et d'une série de Fourier tronquée en D, F, l, l'. La latitude et la distance Terre-Lune sont des séries de Fourier tronquées en D, F, l, l'.

Si l'on désigne par w_2 et w_3 les parties séculaires des longitudes du périgée et du nœud ascendant de la Lune rapportées à l'équinoxe fixe, et par T la partie séculaire de la longitude moyenne héliocentrique du barycentre Terre-Lune, on a :

$$\begin{aligned} D &= w_1 - T + 180^\circ \\ F &= w_1 - w_3 \\ l &= w_1 - w_2. \end{aligned}$$

Les constantes d'intégration sont traditionnellement les valeur $w_1^{(0)}$, $w_2^{(0)}$, $w_3^{(0)}$ de w_1, w_2, w_3 à la date origine, le moyen mouvement sidéral de la Lune ν et, soit $2E$ et 2Γ, les coefficients des termes principaux de la longitude et de la latitude de la Lune, respectivement en $\sin l$ et $\sin F$, soit les quantités e et γ qui se déduisent de $2E$ et 2Γ par l'intermédiaire des développements de ces quantités, en excentricité e et en sinus de la demi-inclinaison γ, dans le problème keplérien. En plus des constantes d'intégration, la solution ne dépend que des constantes suivantes :

- l'_0 et T_0, valeurs de l' et T à la date origine,
- n', moyen mouvement sidéral du Soleil,
- e', excentricité de l'orbite keplérienne du Soleil,
- $\sigma_1 = m_L/(m_T + m_L)$,
- $\sigma_2 = (m_T + m_L)/(m_S + m_T + m_L)$,
- $G' = Gm_T$, où m_L, m_T, m_S sont respectivement les masses de la Lune, de la Terre et du Soleil.

G' est la constante géocentrique de la gravitation ; elle n'intervient, avec la puissance $1/3$, que comme facteur multiplicatif dans la distance Terre-Lune ou dans les coordonnées cartésiennes.

Par suite du choix des constantes d'intégration, les moyens mouvements de w_1 et D sont respectivement ν et $\nu - n'$ et, le périastre du Soleil étant supposé fixe, le moyen mouvement de l' est n'. Les fréquences n_F et n_l de F et l et les moyens mouvements, $w_3^{(1)}$ et $w_2^{(1)}$ du nœud et du périgée qui s'en déduisent par :

$$w_2^{(1)} = \nu - n_l$$
$$w_3^{(1)} = \nu - n_F$$

sont fournis par la théorie.

Dans les coefficients des séries de Fourier tronquées et dans les rapports n_F/ν et n_l/ν, ν et n' n'interviennent que par leur rapport $m = n'/\nu$. Par ailleurs, les constantes $w_1^{(0)}$, $w_2^{(0)}$, $w_3^{(0)}$, l'_0, T_0 n'interviennent que dans les arguments w_1, D, F, l, l'. Finalement, à un facteur d'échelle près, les coefficients des séries de Fourier tronquées et les fréquences de F et de l ne dépendent que des constantes m, e, γ (ou $2E$, 2Γ), e', σ_1 et σ_2 ; σ_2 est souvent remplacé par α, rapport des demi-grands axes képlériens de la Lune et du Soleil associés à ν et n' :

$$\alpha = m^{2/3}(\sigma_2)^{1/3}.$$

Il faut remarquer que toutes ces constantes sont des petits paramètres. Certaines théories dites *littérales* les gardent sous forme littérale et fournissent les coefficients des séries de Fourier tronquées, n_F/ν et n_l/ν sous forme de séries entières tronquées en m, e, γ, e', α, σ_1 ou autres systèmes de constantes équivalents. Malheureusement, la convergence en m des séries complètes représentant les coefficients étant très lente, le nombre des puissances de m qu'il est nécessaire de conserver croît considérablement avec la précision, ce qui augmente en proportion le volume déjà très grand des développements en séries de Fourier. Ce type de solution est celui du problème central de Delaunay. Delaunay ne garde que cinq constantes au lieu de six et prend en compte σ_1 d'une manière approchée en multipliant par $(1 - 2\sigma_1)$ les termes de la solution ayant α en facteur. Calculant "à la main", Delaunay n'a pu dépasser 7 dans le degré des puissances de m conservées dans la solution. Pour augmenter la précision de sa théorie, en particulier en vue de la construction de tables, Delaunay a été amené à ajouter au coefficient de chaque terme des séries de Fourier tronquées un "complément probable", c'est-à-dire une quantité numérique évaluée en fonction de la décroissance numérique des monômes constituants après substitution de valeurs numériques des constantes. À l'ère des ordinateurs, une théorie littérale plus précise a pu être réalisée par Deprit et al. (Deprit et al., 1971 ; Henrard, 1973).

Pour pallier la mauvaise convergence des développements en m, certaines théories attribuent à cette variable une valeur numérique tout en gardant les autres constantes sous forme littérale. C'est le cas de la théorie de Hill-Brown (Brown, 1899b à 1908a). Plus récemment, une théorie du même type, plus précise, a été construite par Gutzwiller et Schmidt (1986).

Enfin, certaines théories attribuent à tous les paramètres m, e, γ, e', α, σ_1 une valeur numérique et, afin de rendre possible une modification des valeurs adoptées, fournissent, en même temps que les valeurs des coefficients, de n_F/ν et de n_l/ν, celles de leurs dérivées par rapport aux paramètres. La théorie de Henrard (1979) fournit jusqu'aux dérivées cinquièmes, la solution ELP (Chapront-Touzé, 1980) fournit les dérivées premières et secondes seulement.

Les théories des deux derniers types sont dites *semi-analytiques*. Pour les raisons données plus haut, les théories semi-analytiques parviennent à atteindre un degré de précision supérieur à celui des théories littérales.

8.2.2.5. Le problème complet

Dans la pratique, le problème complet est traité à partir du problème principal par des méthodes dites de perturbations. Nous supposerons ici, ce qui est le cas pour toutes les solutions utilisées dans les éphémérides, que la solution planétaire associée est à variations séculaires du type défini au paragraphe 8.1.2.5.

Les perturbations complètent les séries de Fourier tronquées du problème principal par des termes qui dépendent, outre des arguments du problème principal, d'arguments supplémentaires, essentiellement les longitudes des planètes, et par des séries de Poisson tronquées. Elles modifient également les fréquences des arguments F et l du problème principal et par suite les moyens mouvements du nœud et du périgée. Enfin, elles apportent dans les arguments D, F, l, l', qui figurent dans les séries du problème principal, et dans l'argument w_1, des termes séculaires non linéaires et éventuellement, dans la théorie de Brown, des termes à longue période. Enfin, elles précisent le plan de référence (écliptique fixe ou écliptique moyen de la date).

Dans la solution L_2, on distingue les perturbations planétaires directes provenant de la partie de la fonction perturbatrice due aux planètes autres que le barycentre Terre-Lune (négligée dans le problème principal), les perturbations planétaires indirectes provenant des différences entre le mouvement réel du barycentre Terre-Lune et le mouvement képlérien utilisé dans le problème principal, les perturbations dues à la forme de la Terre, celles dues à la forme de la Lune, les perturbations relativistes ...

Compte tenu du grand nombre de paramètres intervenant dans les perturbations, celles-ci ne sont jamais traitées sous forme littérale sauf dans des solutions très partielles (perturbations dues à la forme de la Terre, par exemple) ou pour le calcul de quelques termes isolés des perturbations planétaires. Les perturbations apportent dans les séries tronquées représentant la solution un très grand nombre de termes et ce sont elles, plutôt que le problème principal, qui limitent pratiquement la précision des théories analytiques.

C'est avec les travaux de Radau (1895) et surtout ceux de Brown (1908b) que de véritables solutions pour les perturbations ont été introduites dans la théorie de la Lune. Depuis la théorie de Brown, quelques solutions partielles ont été apportées, par exemple les perturbations dues aux formes de la Terre et de la Lune par Henrard (1980 et 1981), des perturbations planétaires directes par Standaert (1982), les perturbations dues à la forme de la Terre et des perturbations indirectes par Kubo (1982), mais seule la solution ELP 2000–82 (Chapront-Touzé et Chapront, 1983) a essayé de donner une représentation complète des perturbations avec une grande précision, dépassant celle obtenue par Brown.

8.2.3. L'éphéméride DE200/LE200

L'éphéméride DE200/LE200 du JPL est la base des éphémérides de la Lune et des planètes publiées par *The Astronomical Almanac* et d'autres éphémérides annuelles depuis 1984. Les constantes des éphémérides de la Lune et des planètes publiées dans la *Connaissance des Temps* ainsi que les conditions initiales de l'intégration numérique, base des *Japanese Ephemerides*, ont été obtenues par ajustement sur DE200/LE200.

DE200/LE200 a été obtenue à partir de l'intégration numérique DE118/LE62 par rotation du système de référence (Standish, 1982). Le système de référence de DE200/LE200 est défini par

Table 8.2.2. Constantes de DE200/LE200 (issues de Standish et al., 1981).

k_2	0.30
δ	0.0407 rad
$G' = Gm_T$	$3.986\,004\,48\ldots \times 10^{14}$ m^{3}s^{-2}
μ	$0.012\,300\,034\ldots$
$(m_S/m_T)/(1+\mu)$	328 900.55

l'équateur moyen de J2000 et l'équinoxe moyen rotationnel de cette même époque (*cf.* 4.2.1). Le système de référence de DE118/LE62 est proche du système du FK4, donc rapporté à 1950.0.

DE118/LE62 (Newhall et al., 1983) a été obtenue par intégration simultanée d'un système d'équations différentielles d'ordre 2, en coordonnées rectangulaires barycentriques (géocentriques pour la Lune), relatives aux planètes, Mercure, Vénus, barycentre Terre-Lune, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et Pluton, au Soleil, au mouvement orbital de la Lune et au mouvement de la Lune autour de son centre de gravité.

Les perturbations relativistes de la première approximation post-newtonienne, en coordonnées barycentriques et métrique isotropique, et les perturbations par des petites planètes, Cérès, Pallas, Vesta, Iris et Bamberga (dont les trajectoires héliocentriques ont été supposées képlériennes) ont été introduites dans les seconds membres des équations différentielles. Les équations relatives à la Lune tiennent également compte des perturbations dues aux harmoniques zonaux de degrés 2, 3 et 4 du potentiel terrestre et aux harmoniques zonaux et tesséraux de degrés 2, 3 et 4 du potentiel lunaire, ainsi que des perturbations dues aux forces de marées selon le modèle simplifié de Williams et al. (1978). Ces dernières forces font intervenir deux coefficients : le nombre de Love pour la Terre k_2 et un angle de phase δ. La principale perturbation produite est une accélération séculaire de la longitude moyenne proportionnelle au produit $k_2\delta$.

LE118/LE62 a été ajustée sur un grand nombre d'observations (Standish, 1990). Pour la Lune, il s'agit de 2954 observations laser (LLR) réalisées entre août 1969 et mai 1980.

Les constantes qui figurent dans DE200/LE200 (Standish et al., 1981) sont de deux types. Certaines ont reçu une valeur a priori, d'autres ont été ajustées en même temps que les conditions initiales de l'intégration numérique. Les valeurs de k_2 et δ sont celles de la table 8.2.2. La valeur de k_2 a été fixée a priori. La valeur de δ provient, à travers l'expression donnée par Williams et al. (1978), de la valeur de l'accélération séculaire de la longitude moyenne de la Lune due aux marées ($-23''.8 \pm 1''.5$ /siècle^2) déterminée par Dickey et al. (1982) à partir du même ensemble d'observations laser de la Lune. Nous donnons dans la table 8.2.2 les valeurs de $G' = Gm_T$, $\mu = m_L/m_T$ et $(m_S/m_T)/(1+\mu)$ qui figurent dans DE200/LE200 et qui sont différentes des valeurs du système UAI 1976. La valeur de G' provient de la valeur de l'unité astronomique en km (constante ajustée) et des valeurs des deux autres constantes. La valeur de μ provient de son inverse, fixé a priori, et la troisième constante est fixée a priori.

La précision de l'éphéméride DE200/LE200 est essentiellement limitée par la précision avec laquelle les conditions initiales et les constantes ajustées ont pu être déterminées, ainsi que par la précision des constantes adoptées a priori. La précision interne de l'intégration numérique est suffisante pour ne pas affecter la précision de l'éphéméride. À la date moyenne des observations utilisées (1975), la précision estimée de la partie lunaire LE200 est de $0''.01$ pour la longitude rapportée à l'équinoxe dynamique et $0''.005$ pour la latitude (Standish, 1986). La précision pour la distance Terre-Lune est probablement de l'ordre de 20 cm (écart-type des observations laser utilisées). Lorsqu'on s'écarte de la date moyenne des observations, une incertitude de $0''.75$/siècle^2 en longitude, provenant de l'incertitude sur l'accélération de marées (ou sur la constante δ), entre en compte et devient prépondérante au bout de quelques dizaines d'années.

8.2.4. La théorie ELP 2000–82 et l'éphéméride ELP 2000

8.2.4.1. Système de référence

La solution ELP 2000–82 (*Éphéméride lunaire parisienne*) est rapportée à l'écliptique moyen de la date et au *point de départ* de ce plan, γ'_{2000}. Le point γ'_{2000} est déduit de l'équinoxe moyen de J2000, γ_{2000}, par

$$N\gamma'_{2000} = N\gamma_{2000},$$

N étant le nœud de l'écliptique moyen de la date sur l'écliptique moyen de J2000. Ce système de référence est semblable à celui de la théorie de Brown, J2000 remplaçant 1900.0 (Brown, 1908b). Il nécessite l'introduction, dans les seconds membres des équations différentielles, de forces de Coriolis dues au mouvement du plan de référence. Ces forces, qui font intervenir les dérivées des termes séculaires des variables en inclinaison du barycentre Terre-Lune, sont beaucoup plus faibles que ne seraient les perturbations planétaires indirectes engendrées par les termes eux-mêmes si le plan de référence était l'écliptique moyen de J2000 (fixe). Cela revient à dire que le mouvement de la Lune est naturellement lié à l'écliptique moyen de la date. Les forces de Coriolis ne sont pas prises en compte dans le problème principal.

8.2.4.2. Le problème principal

La solution du problème principal a été obtenue (Chapront-Touzé, 1980) par intégration des six équations différentielles du premier ordre en variables n, $e\cos\varpi$, $e\sin\varpi$, $\gamma\cos\Omega$, $\gamma\sin\Omega$, λ où n est le moyen mouvement osculateur lié au demi-grand axe osculateur a par la troisième loi de Kepler :

$$n^2a^3 = G(m_T + m_L),$$

e, γ (à ne pas confondre avec les constantes e et γ du paragraphe 8.2.2.4), ϖ, Ω, λ sont des quantités osculatrices, respectivement l'excentricité, le sinus de la demi-inclinaison, la longitude du périgée, la longitude du nœud ascendant et la longitude moyenne, les trois dernières étant rapportées au périastre du Soleil. À partir des variables de l'intégration, on établit les séries tronquées donnant la longitude (rapportée à γ'_{2000}), la latitude et la distance Terre-Lune.

La méthode d'intégration est une méthode itérative couplée avec une méthode d'identification.

Les constantes d'intégration sont ν, Γ, E, $w_1^{(0)}$, $w_2^{(0)}$, $w_3^{(0)}$. Les valeurs de ν, $2E$, 2Γ, e' et n' introduites dans le problème principal de la théorie sont données dans la deuxième colonne de la table 8.2.3, ainsi que la valeur du demi-grand axe káplérien a_L déduit de ν par la troisième loi de

Kepler. Dans l'éphéméride ELP 2000, ces valeurs ont été modifiées par ajustement de ELP 2000–82 à l'intégration numérique du JPL DE200/LE200. Les valeurs de l'éphéméride sont données dans la troisième colonne. La valeur de $G' = Gm_T$ adoptée à la fois dans la théorie et l'éphéméride est la valeur du système UAI 1976 et les valeurs de σ_1 et σ_2, respectivement 0.012 150 568 et $3.040\,423\,956 \times 10^{-6}$ sont déduites des constantes μ et $(m_S/m_T)/(1+\mu)$ du même système mais avec une troncature. La valeur de σ_1 ainsi adoptée augmente de 0.029 m le demi-grand axe keplérien a_L (Table 8.2.3) par rapport à la quantité a_L^* qui serait calculée à partir de la valeur de μ du système UAI 1976. Cette différence, qui n'a d'effet sensible que sur la distance Terre-Lune, est corrigée dans le calcul des éphémérides publiées dans la *Connaissance des Temps* (*cf.* 9.2.2.4).

Table 8.2.3. Constantes du problème principal (issues de Chapront-Touzé et Chapront, 1983).

	théorie ELP 2000–82	éphéméride ELP 2000
ν	1 732 559 343.18″/siècle^2	1 732 559 343.736 04″/siècle^2
$2E$	22 639″.55	22 639″.585 78
2Γ	18 461″.40	18 461″.238 68
e'	0.016 709 24	0.016 708 6156
n'	129 597 742.34″/siècle^2	129 597 742.2758″/siècle^2
a_L	384 747 980.674 m	384 747 980.592 m

a_L est déduit de ν et des constantes G' et σ_1 par la troisième loi de Kepler

8.2.4.3. La solution complète

Les perturbations introduites dans les seconds membres des équations différentielles du problème complet sont les suivantes :

- perturbations dues aux planètes Mercure, Vénus, barycentre Terre-Lune, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune ; Pluton n'est pas pris en compte ni aucune petite planète ;
- perturbations dues aux harmoniques en J_2 et J_3 du potentiel terrestre ;
- perturbations dues à tous les harmoniques de degrés 2 et 3 du potentiel lunaire et une perturbation due aux harmoniques de degré 4 dans la partie séculaire de la longitude moyenne ;
- forces de Coriolis dues à la rotation du repère ;
- forces de marées dans le modèle simplifié de Williams et al. (1978) ;
- les termes relativistes de la première approximation post-newtonienne en coordonnées barycentriques et métrique isotropique (Lestrade et Chapront-Touzé, 1982).

Du point de vue de l'intégration des équations différentielles, ELP 2000–82 est une solution "L_2" associée à la solution VSOP82 (*cf.* 8.1.4.3) pour les planètes et à la solution de Moons (1982) pour la libration de la Lune. Toutefois, dans la solution VSOP82 introduite dans les seconds membres, on a négligé une partie des termes de Poisson à partir du degré 2 en t.

Dans l'intégration des perturbations dues à la forme de la Terre, on a introduit les termes linéaires de la précession en longitude et en obliquité, les quatre premiers termes de la nutation en longitude d'après Woolard (1953) et les trois premiers termes de la nutation en obliquité.

La méthode de perturbations utilisée est celle de Brown (1908b). Elle revient à faire varier dans la solution du problème principal les constantes m, e, γ et les arguments w_1, w_2, w_3. La méthode de Brown fournit les équations différentielles relatives à ces quantités qui se présentent, après intégration, sous forme de séries de Fourier et de Poisson. On substitue ensuite tous les termes de ces séries, sauf les termes séculaires de w_1, w_2, w_3, dans les séries du problème principal en longitude, latitude et distance par l'intermédiaire des dérivées premières. Les termes séculaires de w_1, w_2, w_3, tout comme ceux de l' et T issus de VSOP82 viennent modifier les arguments du problème principal. Dans la théorie ELP 2000–82, les carrés des perturbations sont négligés, mais on en a tenu compte dans le calcul des éléments moyens issus de la théorie ELP 2000–85.

Par ailleurs, dans le calcul des éléments moyens de la théorie ELP 2000–85, on a supprimé la contribution des harmoniques de degré 4 du potentiel lunaire et on a utilisé, pour la partie séculaire de l'excentricité du barycentre Terre-Lune, la solution de Laskar (1986a) au lieu de VSOP82.

Les constantes, autres que les constantes du problème principal, qui sont introduites dans la solution complète, ont reçu les valeurs du système UAI 1976 sauf les constantes β_L et γ_L, liées aux moments d'inertie de la Lune A, B, C (dans l'ordre croissant) par les formules $\beta_L = \dfrac{C-A}{B}$, $\gamma_L = \dfrac{B-A}{C}$, et les coefficients des harmoniques zonaux (J_{2L}, J_{3L}) et tesséraux ($C_{22L}, C_{31L}, S_{31L}, C_{32L}, S_{32L}, C_{33L}, S_{33L}$) de la Lune pour lesquels on a préféré utiliser des valeurs plus récentes issues de Ferrari et al. (1980), avec une légère modification pour les constantes β_L et γ_L (Chapront-Touzé, 1983). Ces valeurs sont données dans la table 8.2.4. Les constantes k_2 et δ, qui ne figurent pas dans le système UAI 1976, ont reçu les valeurs utilisées dans l'intégration numérique DE200/LE200 (*cf.* 8.2.3).

Nous donnons dans les tables 8.2.5 et 8.2.6 les contributions du problème principal et des différentes perturbations aux moyens mouvements du périgée et du nœud et aux termes quadratiques de la longitude moyenne et des longitudes du périgée et du nœud, ces dernières étant issues de la théorie ELP 2000–85. Nous avons inclus dans la table 8.2.5 l'effet du changement de constantes entre la théorie et l'éphéméride (correction). Il faut noter que, dans les tables 8.2.5, 8.2.6 et 8.2.8, la longitude moyenne w_1 et les longitudes du périgée et du nœud, w_2 et w_3, sont par construction des éléments moyens rapportés au repère de la théorie c'est-à-dire à l'écliptique moyen de la date et au point de départ, γ'_{2000}. Toutefois, ils coïncident encore avec les parties séculaires des éléments osculateurs lorsqu'on rapporte ceux-ci à l'écliptique et à l'équinoxe moyens inertiels J2000.

Les niveaux de troncature choisis pour les séries sont $0''.000\,01$ pour la longitude et la latitude et 2 cm pour la distance, c'est-à-dire que tous les termes des séries de Fourier dont les coefficients ont été trouvés inférieurs à ces quantités ont été supprimés. La table 8.2.7 donne le nombre de termes relatifs aux différentes contributions.

8.2.4.4. Ajustement sur LE200

L'éphéméride ELP 2000 a été obtenue à partir de la théorie ELP 2000–82, en ajustant les constantes d'intégration de cette dernière et quelques autres constantes sur l'éphéméride LE200 (*cf.* 8.2.3). L'ajustement a porté sur l'intervalle de temps [1900, 2000].

Table 8.2.4. Autres constantes du problème complet (issues de Ferrari et al., 1980 et Chapront-Touzé, 1983).

β_L	$0.632\,108 \times 10^{-3}$	S_{31L}	$0.561\,07 \times 10^{-5}$
γ_L	$0.228\,443 \times 10^{-3}$	C_{32L}	$0.488\,84 \times 10^{-5}$
J_{2L}	$0.202\,15 \times 10^{-3}$	S_{32L}	0.1687×10^{-5}
J_{3L}	$0.121\,26 \times 10^{-4}$	C_{33L}	0.1436×10^{-5}
C_{22L}	$0.223\,04 \times 10^{-4}$	S_{33L}	$-0.334\,35 \times 10^{-6}$
C_{31L}	0.3071×10^{-4}		

Table 8.2.5. Contributions aux moyens mouvements du périgée et du nœud (issues de Chapront-Touzé et Chapront, 1983).

	w_2 (″/siècle)	w_3 (″/siècle)
Problème principal (constantes de la théorie)	14 642 537.9368	−6 967 167.2643
Correction (constantes de l'éphéméride)	1.7009	−0.4465
Forme de la Terre	633.4034	−592.5357
Forme de la Lune	−1.7472	−16.9443
Perturbation planétaires directes	265.2350	−142.0678
Perturbation planétaires indirectes	−17.4438	−2.2034
Effets de marées	0.0670	0
Relativité	1.1111	2.0998
Total	14 643 420.2632	−6 967 919.3622

Table 8.2.6. Contributions aux termes quadratiques de la longitude moyenne et des longitudes du périgée et du nœud (issues de Chapront-Touzé et Chapront, 1988).

	w_1 (″/siècle^2)	w_2 (″/siècle^2)	w_3 (″/siècle^2)
Forme de la Terre	0.1925	0.1003	−0.0958
Perturbation planétaires directes	0.0005	−0.0008	0.0002
Perturbation planétaires indirectes	5.8660	−38.5532	6.5042
Effets de marées	−11.9473	0.1761	−0.0464
Total	−5.8883	−38.2776	6.3622

Table 8.2.7. Nombre de termes dans les séries tronquées de ELP 2000–82.

		Longitude	Latitude	Distance
Problème principal	F	1 023	918	704
Forme de la Terre	F	347	316	237
	$t.F$	14	11	8
Forme de la Lune	F	20	12	14
Perturbation planétaires	F	14 498	5 383	6 745
	$t.F$	4 610	1 021	1 884
	$t^2.F$	28	13	19
Effets de marées	F	3	2	2
	$t.F$	6	4	5
Relativité	F	11	4	10
Total		20 560	7 684	9 628

F : série de Fourier ; $t.F$: temps $\times$ série de Fourier ;
$t^2.F$: carré du temps $\times$ série de Fourier.

Table 8.2.8. Arguments fondamentaux et longitudes moyennes du périgée et du nœud issus de ELP 2000–85 (Chapront-Touzé et Chapront, 1988). t est le temps TDB mesuré en siècles juliens à partir de J2000 (DJ 2 451 545.0).

$$w_1 = 218^\circ.316\,654\,36 + 1\,732\,559\,343''.736\,04\,t - 5''.888\,3\,t^2 + 0''.006\,604\,t^3 - 0''.000\,031\,69\,t^4$$
$$w_2 = 83^\circ.353\,242\,99 + 14\,643\,420''.2632\,t - 38''.2776\,t^2 - 0''.045\,047\,t^3 + 0''.000\,213\,01\,t^4$$
$$w_3 = 125^\circ.044\,555\,04 - 6\,967\,919''.3622\,t + 6''.3622\,t^2 + 0''.007\,625\,t^3 - 0''.000\,035\,86\,t^4$$
$$D = 297^\circ.850\,204\,20 + 1\,602\,961\,601''.4603\,t - 5''.8681\,t^2 + 0''.006\,595\,t^3 - 0''.000\,031\,84\,t^4$$
$$F = 93^\circ.272\,099\,32 + 1\,739\,527\,263''.0983\,t - 12''.2505\,t^2 - 0''.001\,021\,t^3 + 0''.000\,004\,17\,t^4$$
$$l = 134^\circ.963\,411\,38 + 1\,717\,915\,923''.4728\,t + 32''.3893\,t^2 + 0''.051\,651\,t^3 - 0''.000\,244\,70\,t^4$$
$$l' = 357^\circ.529\,109\,18 + 129\,596\,581''.0474\,t - 0''.5529\,t^2 + 0''.000\,147\,t^3$$

Les constantes ajustées étaient les suivantes : ν, $2E$, 2Γ, e', n', $w_1^{(0)}$, $w_2^{(0)}$, $w_3^{(0)}$, T_0, $T_0 - l'_0$, la date origine étant J2000. La solution ELP 2000–85 utilise les mêmes valeurs des constantes.

La table 8.2.8 donne les expressions de w_1, w_2, w_3, D, F, l, l' issus de ELP 2000–85. t est le temps (TDB) en siècles juliens compté à partir de J2000 (date julienne 2 451 545.0). Les expressions des parties séculaires des longitudes moyennes des planètes autres que le barycentre Terre-Lune sont issues de VSOP82.

Pour l'ajustement de ELP 2000–82 sur LE200, on a modifié les valeurs des constantes σ_1 et G' introduites dans la théorie de façon à les rendre égales aux valeurs utilisées dans l'intégration

Table 8.2.9. Estimation de l'erreur interne maximale de ELP 2000–82.

	Longitude	Latitude	Distance
Théorie complète	$0''.011$	$0''.006$	15 m
Problème principal	$0''.000\,25$	$0''.000\,25$	0.35 m

numérique ; ces différences modifient principalement la distance Terre-Lune d'environ 15 m. Mais ce sont les valeurs d'origine, issues du système UAI 1976, qui ont été introduites dans ELP 2000.

On a, en plus, déterminé deux constantes fixant les positions de l'écliptique et de l'équinoxe moyens dynamiques inertiels de J2000 par rapport au repère de DE200/LE200 (*cf.* 4.2.1) et trois paramètres, dits *paramètres de dérive*, représentant les différences "théorie – intégration numérique" (après introduction des constantes ajustées dans la théorie) pour les quantités suivantes : accélération séculaire de la longitude moyenne et moyens mouvements des longitudes du périgée et du nœud. Les paramètres de dérive étaient uniquement destinés à tester la précision de la théorie et les valeurs obtenues n'ont pas été introduites dans l'éphéméride ELP 2000.

8.2.4.5. Précision

La précision de ELP 2000–82 dépend de plusieurs facteurs :

- les forces prises en compte,
- le niveau de troncature des séries,
- la précision de l'intégration des équations différentielles,
- la précision des constantes fixées a priori,
- la précision des constantes ajustées.

Les erreurs dues aux trois premiers facteurs peuvent être qualifiées d'erreurs internes à la théorie. Une estimation de la borne supérieure de ces erreurs sur l'intervalle [1900, 2000] est fournie par la comparaison à LE200 et en particulier par les valeurs maximales des résidus après ajustement. Les valeurs des paramètres de dérive sont suffisamment petites pour que leur origine (défaut de la théorie, défaut de l'intégration numérique ou différences résiduelles de constantes) ne soit pas certaine. On trouvera cette estimation à la première ligne de la table 8.2.9.

On peut considérer que le modèle des forces introduit est suffisamment complet pour que les erreurs dues aux forces négligées (contribution des termes de degré supérieur des potentiels terrestres et lunaires, action des petites planètes...) soient très petites devant les autres erreurs internes. Les erreurs introduites lors de l'intégration des équations différentielles proviennent essentiellement de la partie "perturbations" dans laquelle les carrés des perturbations au problème principal ont été négligés, ainsi qu'une partie des termes de Poisson dans les coordonnées des planètes. Les erreurs dues à la troncature des séries proviennent essentiellement des perturbations planétaires en raison du grand nombre d'arguments produits (Table 8.2.7). Dans les deux cas, les erreurs provenant de l'intégration du problème principal sont beaucoup plus petites. On trouvera à la deuxième ligne de la table 8.2.9 une estimation des erreurs internes maximales du problème principal, issue d'une comparaison à une intégration numérique par Kinoshita (1982).

La principale incertitude due aux constantes fixées a priori provient de la constante δ et, comme pour DE200/LE200, peut être estimées à $0''.75/\text{siècle}^2$ en longitude. À un niveau moindre, la constante $G' = Gm_T$ et la constante σ_1 peuvent être causes d'une erreur d'environ 17.5 m (estimée à partir des valeurs IERS 1989 des constantes) sur la distance Terre-Lune.

Les erreurs sur les constantes ajustées peuvent provenir à la fois des erreurs de la théorie ELP 2000–82 et des erreurs dues aux conditions initiales de l'intégration numérique DE118/LE62, dans la mesure où l'ajustement élimine les erreurs sur les autres constantes. Les erreurs sur les conditions initiales de DE118/LE62 peuvent être assimilées à des erreurs sur les constantes d'une solution analytique parfaite avec les écarts-types fournis par Standish (1990). Dans la mesure où ces derniers écarts-types sont supérieurs d'un facteur 10 environ aux écarts-types analogues provenant de l'ajustement de ELP 2000–82 sur LE200, on peut conclure que les constantes de ELP 2000 sont beaucoup plus proches des constantes de LE200 que ces dernières ne le sont des constantes du problème réel et assimiler l'incertitude sur ELP 2000 due aux constantes ajustées à l'incertitude (écart-type) sur LE200 au voisinage de 1975, c'est-à-dire $0''.01$ en longitude, $0''.005$ en latitude et probablement environ 20 cm en distance. De l'examen des écarts-types de l'ajustement de ELP 2000–82 sur LE200, on conclut également que la précision des constantes ajustées est limitée, du point de vue de la théorie, non par la précision de la théorie complète, qui conduirait à des écarts-types beaucoup plus grands, mais plutôt par la précision du problème principal. On peut interpréter ceci par le fait que seuls les coefficients du problème principal sont sensibles aux modifications de constantes et que la durée relativement longue de la comparaison (un siècle) permet de séparer l'influence des différents arguments et donc d'éliminer les perturbations planétaires, fonctions des longitudes des planètes, moins bien connues.

8.2.5. Éléments de l'orbite de la Lune

La table 8.2.10 donne les éléments moyens de l'orbite de la Lune issus de la théorie ELP 2000–85, rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens dynamiques inertiels de la date (Simon et al., 1994). Les éléments a, e, i, ϖ, Ω, L sont, ici, les parties séculaires des éléments osculateurs suivants : demi-grand axe, excentricité, inclinaison, longitude du périgée, longitude du nœud ascendant et longitude moyenne de la Lune. ϖ, Ω et L sont déduits des éléments w_2, w_3 et w_1 donnés dans la table 8.2.8 par addition de la précession en longitude d'après Laskar (1986a). t est le temps (TDB) en siècles juliens compté à partir de J2000.

Ces éléments moyens, provenant en partie d'une théorie planétaire à termes séculaires, ne sont pas valables indéfiniment. Leur période d'utilisation optimale, du point de vue de la précision, se situe à l'intérieur de l'intervalle $[-4000,\ +8000]$. Ils peuvent perdre toute signification à l'extérieur de l'intervalle $[-10\,000,\ +14\,000]$.

Il ne faut pas confondre éléments moyens et éléments osculateurs. Seuls les éléments osculateurs peuvent fournir, avec exactitude, la position réelle de la Lune à un instant donné. Les éléments moyens permettent d'apprécier l'évolution de cette position sur des intervalles de temps longs ou d'obtenir une valeur approchée des éléments osculateurs avec une erreur qui varie selon les éléments considérés. En particulier, cette erreur peut atteindre 30% pour l'excentricité et 20 degrés pour la

Table 8.2.10. Éléments moyens de l'orbite de la Lune rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de la date (issus de Simon et al., 1994). t est le temps TDB mesuré en siècles juliens à partir de J2000 (DJ 2 451 545.0).

$$a\ (\mathrm{km}) = 383\,397.7916 + 0.0038\,t$$
$$e = 0.055\,545\,526 - 0.000\,000\,016\,t$$
$$i = 5^\circ.156\,689\,83 - 0''.000\,08\,t$$
$$\varpi = 83^\circ.353\,242\,99 + 14\,648\,449''.3598\,t - 37''.1656\,t^2 - 0''.044\,970\,t^3 + 0''.000\,189\,48\,t^4$$
$$\Omega = 125^\circ.044\,555\,04 - 6\,962\,890''.2656\,t + 7''.4742\,t^2 + 0''.007\,702\,t^3 - 0''.000\,059\,39\,t^4$$
$$L = 218^\circ.316\,654\,36 + 1\,732\,564\,372''.832\,63\,t - 4''.7763\,t^2 + 0''.006\,681\,t^3 - 0''.000\,055\,22\,t^4$$

Table 8.2.11. Comparaison entre les éléments moyens et les éléments osculateurs pour une date donnée.

Date (TDB)	1 mai 1990 0 h	
t (siècles)	−0.096 714 579 055 442	
	Éléments moyens	Éléments osculateurs
a (km)	383 397.7912	380 358
e	0.055 545 528	0.064 85
i	5°.156 689 83	5°.0347
ϖ	49°.820 198 20	31°.83
Ω	312°.103 741 41	312°.034
L	112°.696 085 10	112°.4548

Table 8.2.12. Périodes usuelles.

Mois	argument	durée (jours)
sidéral	w_1	$27.321\,661\,547 + 0.186 \times 10^{-6}\,t$
tropique	L	$27.321\,582\,241 + 0.151 \times 10^{-6}\,t$
synodique	D	$29.530\,588\,853 + 0.216 \times 10^{-6}\,t$
draconitique	F	$27.212\,220\,817 + 0.383 \times 10^{-6}\,t$
anomalistique	l	$27.554\,549\,878 - 1.039 \times 10^{-6}\,t - 2 \times 10^{-9}\,t^2$

longitude du périgée. On trouvera dans la table 8.2.11 un exemple de calcul des éléments moyens et les valeurs des éléments osculateurs correspondants.

8.2.6. Périodes usuelles

On utilise de façon courante les périodes suivantes.

• Mois sidéral : période de l'argument w_1. w_1 est la partie séculaire de la longitude moyenne de la Lune rapportée à l'écliptique moyen de la date et au point de départ, γ'_{2000}. Elle coïncide avec la partie séculaire obtenue en rapportant cette longitude moyenne à l'écliptique et à l'équinoxe moyens inertiels J2000.

• Mois tropique : période de l'argument L. L est la partie séculaire de la longitude moyenne de la Lune rapportée à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de la date.

• Mois synodique : période de l'argument $D = w_1 - T + 180°$. D est la partie séculaire de la différence entre la longitude moyenne de la Lune et la longitude moyenne du Soleil dans son mouvement autour du barycentre Terre-Lune. La longitude moyenne du Soleil est rapportée à l'écliptique et à l'équinoxe moyens J2000.

• Mois draconitique : période de l'argument F. F est la partie séculaire de la longitude moyenne de la Lune rapportée au nœud ascendant de son orbite sur l'écliptique moyen de la date.

• Mois anomalistique : période de l'argument l. l est la partie séculaire de l'anomalie moyenne de la Lune.

Ces quantités sont des fonctions lentement variables du temps. On les trouvera dans la table 8.2.12, où t est le temps (TDB) en siècles juliens compté à partir de J2000.

8.3. LES SATELLITES DE MARS

8.3.1. Découverte et observations

Mars possède deux satellites découverts en août 1877 par Asaph Hall au télescope de 26 pouces de l'observatoire naval de Washington. Peu après leur découverte, ces satellites ont reçu les noms de Phobos et Déimos, serviteurs d'Arès (Mars) dans l'Illiade.

Les orbites de Phobos et Déimos autour de Mars (orbites aréocentriques) sont voisines de cercles dont les rayons respectifs valent 2.8 et 6.9 fois le rayon équatorial de Mars. Les plans de ces orbites sont faiblement inclinés sur l'équateur de Mars et les périodes orbitales sont respectivement 7 h 39 min et 30 h 18 min.

Ces caractéristiques, ainsi que les faibles magnitudes des satellites, les rendent difficiles à observer depuis la Terre. Il existe néanmoins près de 10 000 observations terrestres pour l'ensemble des deux satellites. Elles ont été réalisées au moment des oppositions de Mars, qui ont lieu tous les deux ans environ, très régulièrement dans les 50 années qui ont suivi la découverte des satellites, plus rarement ensuite, puis à nouveau régulièrement à partir de 1967 (Morley, 1989). Depuis l'avènement de l'ère spatiale, les observations transmises par les sondes Mariner 9 (novembre 1971-octobre 1972), Viking 1 et Viking 2 (juillet 1976-juillet 1980) puis Phobos 2 (février et mars 1988) ont permis d'améliorer considérablement notre connaissance de Phobos et Déimos.

Nous donnons dans la table 8.3.1 des valeurs approchées du demi-grand axe, de la période orbitale, de l'excentricité et de l'inclinaison par rapport à l'équateur moyen de la date de Mars. Pour celles de ces quantités dont la variation n'est pas négligeable à la précision considérée, la valeur approchée a été remplacée par un intervalle de variation estimé sur la période [1943, 2000]. L'intervalle de variation le plus grand est celui de l'inclinaison de l'orbite de Déimos sur l'équateur de Mars qui dépend de la longitude du nœud du satellite, de période 55 ans environ. Lorsque l'intervalle de temps considéré est inférieur à cette période, l'intervalle de variation diminue. Il se réduit à $0^\circ.91/1^\circ.80$ sur la période [1990, 2000].

8.3.2. Les théories

8.3.2.1. Le modèle de Struve

Le modèle de Struve (1911) a été longtemps utilisé, avec des ajustements successifs sur les observations comme ceux de, par exemple, Burton (1929), Shor (1975).

Dans ce modèle les orbites aréocentriques sont rapportées à un plan de Laplace, différent pour chaque satellite, dont la position est repérée par son inclinaison J_a sur l'équateur céleste moyen d'une date de référence et par l'ascension droite N_a de son nœud ascendant A sur ce même plan, mesurée à partir de l'équinoxe moyen de la date de référence γ (Fig. 8.3.1). Les plans de Laplace passent par la ligne des nœuds de l'équateur moyen de la date de Mars sur l'orbite moyenne de la date de Mars.

L'orbite aréocentrique de chaque satellite est assimilée à une ellipse précessante de la façon suivante. Le demi-grand axe a, l'excentricité e et l'inclinaison I sur le plan de Laplace sont supposés constants. La longitude K du nœud ascendant C sur le plan de Laplace, mesurée à partir de A dans le plan de Laplace, est assimilée à une fonction linéaire du temps :

$$K = K_0 + \dot{K}\,t.$$

La longitude P du périastre P, arc brisé mesuré à partir de γ dans l'équateur céleste (arc γA) puis le long du plan de Laplace (arc AC) et enfin le long de l'orbite (arc CP), est assimilée à une fonction linéaire du temps :

$$P = P_0 + \dot{P}\,t.$$

La longitude moyenne L du satellite mesurée à partir de γ est définie par :

$$L = P + l$$

où l est l'anomalie moyenne du satellite. L a été de même assimilé à une fonction linéaire du temps jusqu'à la mise en évidence par Sharpless (1945) d'un terme quadratique. On notera donc :

$$L = L_0 + \nu t + qt^2. \tag{8.3.1}$$

Table 8.3.1. Valeurs approchées d'éléments des orbites de Phobos et Déimos (inclinaisons rapportées à l'équateur moyen de la date de Mars).

	Demi-grand axe (10^3 km)	Période orbitale (jour)	Excentricité	Inclinaison (degré)
Phobos	9.38	0.3189	0.0145/0.0158	1.05/1.09
Déimos	23.46	1.2624	0.0000/0.0004	0.88/2.70

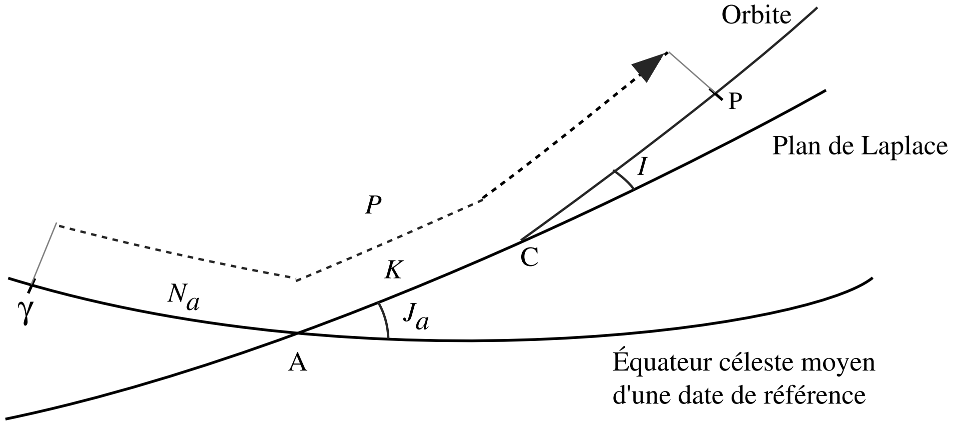

Fig. 8.3.1. Éléments de Struve.

Les différentes quantités intervenant dans le modèle de Struve, N_a, J_a, a, e, I, K_0, $\dot{K}$, P_0, $\dot{P}$, L_0, ν, q, sont déterminées par ajustement sur les observations. Pour les deux satellites, $\dot{K}$ est négatif (le nœud ascendant de l'orbite rétrograde sur le plan de Laplace) et $\dot{P}$ est positif, très voisin de la valeur absolue de $\dot{K}$.

L'introduction du plan de Laplace se justifie de la façon théorique suivante (Sinclair, 1972). Les principales perturbations agissant sur les satellites de Mars sont dues au Soleil et à la non sphéricité de Mars, en particulier au terme en J_2 de son potentiel. En rapportant le mouvement d'un satellite à un plan quelconque passant par la ligne des nœuds de l'équateur moyen de la date

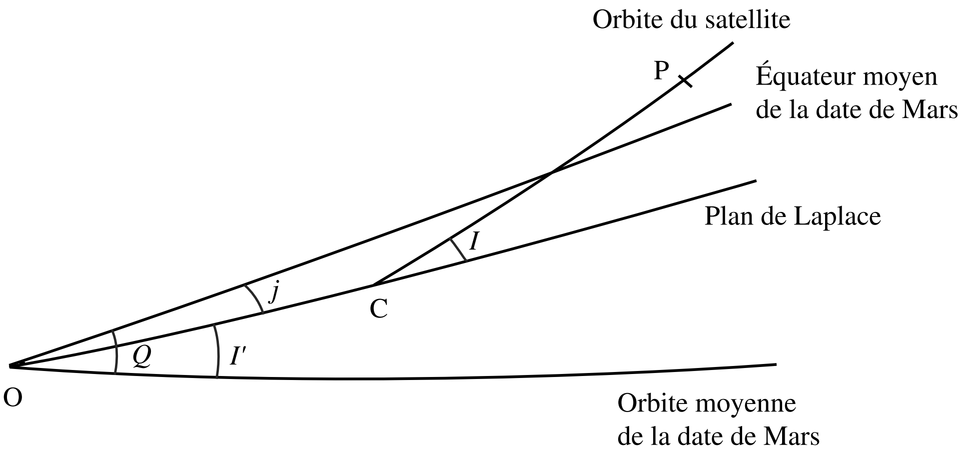

Fig. 8.3.2. Position des plans de référence.

de Mars sur l'orbite moyenne de la date de Mars et d'inclinaison I' sur l'orbite moyenne de la date de Mars, on trouve dans la fonction perturbatrice :

– des termes ne dépendant que des éléments métriques (demi-grand axe, excentricité, inclinaison) qui par intégration, au premier ordre, donnent des termes séculaires ;

– des termes qui contiennent l'anomalie moyenne du satellite, donc à courte période ;

– des termes qui contiennent l'anomalie moyenne du Soleil sans contenir celle du satellite, que l'on peut qualifier de termes à moyenne période ;

– des termes qui contiennent les longitudes du nœud et du périastre du satellite sans contenir les anomalies moyennes ; ces termes sont à longue période.

Pour des coefficients du même ordre en excentricité et en inclinaison, les termes à longue période donnent par intégration des perturbations beaucoup plus fortes que les termes à courte ou moyenne période. Si on ne tient compte, pour le potentiel de Mars, que du terme en J_2, les seuls termes à longue période, parmi les termes du premier ordre en excentricité et en inclinaison de la fonction perturbatrice, sont :

$$\frac{3}{8}n'^2a^2(1-e'^2)^{-\frac{3}{2}}(1+\frac{3}{2}e^2)\sin I\sin 2I'\cos(K-K')-\frac{3}{4}n^2J_2r_0^2(1+\frac{3}{2}e^2)\sin I\sin 2j\cos(K-K')$$

où r_0 est le rayon équatorial de Mars, j l'inclinaison de l'équateur moyen de la date de Mars sur le plan de référence, n se déduit de a par la troisième loi de Kepler et les lettres accentuées se rapportent au mouvement aréocentrique du Soleil. En notant Q l'inclinaison de l'équateur moyen de la date de Mars sur l'orbite moyenne de la date de Mars, on a (Fig. 8.3.2) :

$$I' = Q - j.$$

En choisissant le plan de référence tel que :

$$2n^2 J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \sin 2j = n'^2(1-e'^2)^{-\frac{3}{2}} \sin 2(Q-j), \tag{8.3.2}$$

on élimine les termes à longue période qui apparaîtraient au premier ordre dans l'inclinaison et la longitude du nœud (Table 8.3.1). Il subsiste toutefois un terme à longue période dans la longitude moyenne (Born et Duxbury, 1975). Le plan de référence ainsi défini est le plan de Laplace du satellite. Dans le modèle de Struve, tous les termes périodiques sont négligés.

8.3.2.2. Les théories analytiques

À l'approche des années 1970, compte tenu de la précision attendue des premiers projets spatiaux vers Mars, le modèle de Struve, qui négligeait toutes les perturbations périodiques, est apparu insuffisant.

Élaborée à cette époque, la théorie de Sinclair (1972) tenait compte des perturbations dues aux harmoniques zonaux du potentiel de Mars jusqu'au degré 4, des perturbations dues au Soleil, l'orbite aréocentrique de ce dernier étant assimilée à une ellipse précessante, et des perturbations dues à la précession de l'équateur de Mars. Toutefois, les perturbations n'étaient calculées qu'au premier ordre des petits paramètres : J_2, J_3, J_4 et le rapport des moyens mouvements du Soleil et du satellite.

Pour chaque satellite, le plan de référence était le plan de Laplace défini comme au paragraphe 8.3.2.1 mais en remplaçant dans la formule (8.3.2) a et n par les parties constantes du demi-grand axe et du moyen mouvement osculateurs. L'origine des longitudes était le nœud ascendant O du plan de Laplace sur l'orbite moyenne de la date de Mars (Fig. 8.3.2).

Les éléments osculateurs aréocentriques utilisés par Sinclair étaient le demi-grand axe a, l'excentricité e, $\theta = \sin I$, h la longitude du nœud ascendant C de l'orbite du satellite sur le plan de Laplace (arc OC), ϖ la longitude du périastre P mesurée le long du plan de Laplace (arc OC) puis le long de l'orbite du satellite (arc CP), λ la longitude moyenne définie par :

$$\lambda = \varpi + l$$

où l est l'anomalie moyenne du satellite.

La théorie de Sinclair était entièrement analytique et ses constantes d'intégration étaient déterminées par ajustement sur les observations terrestres de 1877 à 1969.

Dans les années qui ont suivi, la longitude moyenne de la solution de Sinclair a été complétée par un terme à longue période (Born et Duxbury, 1975) et un terme dépendant de l'harmonique tesséral C_{22} du potentiel de Mars (Hildebrand et al., 1979).

Près de vingt années plus tard, le projet soviétique Phobos suscita à nouveau l'intérêt des astronomes pour le mouvement des satellites de Mars et en particulier de Phobos.

La théorie de Sinclair, avec les améliorations citées plus haut et quelques autres, fut ajustée sur un nouvel ensemble d'observations comprenant à la fois des observations terrestres et les observations des sondes Mariner et Viking, par Sinclair (1989) et Jacobson et al. (1989). Parallèlement, de nouvelles théories, plus précises, furent élaborées et ajustées sur des observations terrestres et spatiales. On peut citer parmi ces nouvelles théories celles de Chapront-Touzé (1988, 1990a, 1990b), Emel'yanov et Nasonova (1989), Morley (1990), Shor (1988). Par rapport à la théorie de Sinclair, elles tiennent compte d'un modèle plus complet du potentiel de Mars et sont calculées à un ordre plus élevé des petits paramètres ; de plus, certaines tiennent compte d'autres types de perturbations.

8.3.3. Bases de l'éphéméride de la Connaissance des Temps

La *Connaissance des Temps* utilise les solutions ESAPHO (*Éphéméride semi-analytique de Phobos*), pour Phobos, et ESADE (*Éphéméride semi-analytique de Déimos*), pour Déimos, élaborées au Bureau des longitudes (Chapront-Touzé, 1988, 1990a, 1990b). Ces solutions sont ajustées sur un ensemble d'observations terrestres couvrant la période [1877, 1988] et sur les observations fournies par les sondes spatiales Mariner, Viking et Phobos.

La solution ESAPHO repose sur une théorie semi-analytique tenant compte des perturbations suivantes : effet des harmoniques zonaux et tesséraux du potentiel de Mars jusqu'au degré 9, action du Soleil dont la trajectoire aréocentrique contient les principales perturbations périodiques, effet du mouvement du plan de référence, action directe des planètes, effet de la nutation de Mars sur les perturbations dues au potentiel de Mars, action de Déimos, effet de la non sphéricité de Phobos. La solution ESAPHO inclut également des corrections aux moyens mouvements du nœud et du périastre ajustées sur l'observation, les moyens mouvements issus de la théorie étant mal connus par suite de l'imprécision des paramètres du potentiel de Phobos lui-même.

La solution ESADE repose sur une théorie semi-analytique moins élaborée tenant compte uniquement des effets des harmoniques zonaux et tesséraux du potentiel de Mars jusqu'au degré 3, du mouvement du plan de référence et des perturbations dues au Soleil dont la trajectoire aréocentrique est assimilée à une ellipse précessante.

Le plan de référence des théories ESAPHO et ESADE est l'équateur moyen de la date de Mars, l'origine des longitudes étant le nœud ascendant O de ce plan sur l'orbite moyenne de la date de Mars (Fig. 8.3.2).

Les théories sont intégrées en variables n, $e\cos\varpi$, $e\sin\varpi$, $\gamma\cos h$, $\gamma\sin h$, λ, où n est le moyen mouvement osculateur, et γ le sinus de la moitié de l'inclinaison sur le plan de référence. Les autres quantités ont la même définition que dans la théorie de Sinclair (*cf.* 8.3.2.2) mais en remplaçant le plan de Laplace par l'équateur moyen de la date de Mars. Les six variables se présentent sous forme de séries de Fourier à six arguments littéraux sauf pour les perturbations planétaires qui contiennent en plus les longitudes des planètes. Les coefficients des séries sont numériques mais sont accompagnés de leurs dérivées par rapport aux constantes d'intégration pour permettre l'ajustement de celles-ci sur les observations. λ contient en plus une partie séculaire, sous une forme analogue à l'équation (8.3.1), dont le coefficient du terme quadratique (accélération séculaire) est ajusté sur les observations. Ces variables sont ensuite transformées en coordonnées rectangulaires. Compte tenu de la précision actuelle des observations, on n'a retenu, pour la solution utilisée dans la *Connaissance des Temps*, que les termes dont les coefficients sont supérieurs à 50 mètres.

On peut également transformer n, $e\cos\varpi$, $e\sin\varpi$, $\gamma\cos h$, $\gamma\sin h$ et λ en éléments osculateurs de Struve a, e, I, K, P, L rapportés au plan de Laplace de chaque satellite (Chapront-Touzé, 1994).

Table 8.3.2. Éléments moyens de Struve rapportés à J2000 d'après Chapront-Touzé (1994). t est le temps TDB compté en jours à partir de J2000 (DJ 2 451 545.0).

Phobos

$$
\begin{aligned}
a &= 9\,378.54\,\mathrm{km}\\
e &= 0.015\,149\\
I &= 1^\circ.067\,65\\
K &= 169^\circ.13 - 0^\circ.436\,028\,t\\
P &= 73^\circ.83 + 0^\circ.435\,314\,t\\
L &= 262^\circ.8408 + 1\,128^\circ.844\,7538\,t + 0^\circ.9518 \times 10^{-8}\,t^2\\
N_a &= 47^\circ.6706 - 2^\circ.959 \times 10^{-6}\,t\\
J_a &= 37^\circ.108 + 1^\circ.680 \times 10^{-6}\,t\\
j &= 0^\circ.009\,38
\end{aligned}
$$

Déimos

$$
\begin{aligned}
a &= 23\,458.94\,\mathrm{km}\\
e &= 0.000\,205\\
I &= 1^\circ.789\,00\\
K &= 55^\circ.27 - 0^\circ.018\,004\,t\\
P &= 314^\circ.73 + 0^\circ.018\,001\,t\\
L &= 305^\circ.9387 + 285^\circ.161\,8691\,t - 0^\circ.377 \times 10^{-9}\,t^2\\
N_a &= 46^\circ.6494 - 2^\circ.869 \times 10^{-6}\,t\\
J_a &= 36^\circ.467 + 1^\circ.651 \times 10^{-6}\,t\\
j &= 0^\circ.895\,09
\end{aligned}
$$

Le plan de Laplace est défini comme dans la théorie de Sinclair (*cf.* 8.3.2.2). Les éléments osculateurs de Struve ont une définition analogue aux éléments du modèle de Struve (*cf.* 8.3.2.1) mais ils contiennent en plus des termes périodiques. Une telle transformation en éléments osculateurs de Struve est couramment utilisée et permet des comparaisons entre théories. Dans le cas de la solution ESADE, elle permet en plus d'éliminer une perturbation constante de la variable $\gamma \cos h$ due à l'utilisation de l'équateur de Mars comme plan de référence et responsable des importantes variations de l'inclinaison de l'orbite du satellite par rapport à ce plan constatées dans la table 8.3.1.

Nous donnons dans la table 8.3.2 les éléments moyens de Struve issus des éléments osculateurs de Struve ainsi développés, c'est-à-dire la partie constante pour a, e, I et la partie séculaire pour K, P, L. Nous donnons également l'inclinaison j de l'équateur moyen de la date de Mars sur le plan de Laplace et les paramètres N_a et J_a calculés à partir de cette quantité et des coordonnées du pôle de Mars (Table 10.1). La date de référence choisie pour l'équateur céleste et l'équinoxe (Fig. 8.3.1) est J2000, t est le temps TDB compté en jours à partir de J2000.

Nous donnons à titre indicatif dans la table 8.3.3, pour chaque élément de Struve, le coefficient du premier terme périodique, lorsque ceux-ci sont rangés dans l'ordre décroissant des coefficients,

Table 8.3.3. Données sur les termes périodiques des éléments de Struve d'après Chapront-Touzé (1994).

	Phobos		Déimos			
	Coefficient du premier terme périodique	Nombre de termes	Coefficient du premier terme périodique	Nombre de termes	Niveau de troncature	Unité
a	0.68	7	−0.81	7	0.01	km
e	0.000 386	17	0.000 058	27	0.000 001	
I	0.006 493	21	0.014 919	18	0.000 057	degré
K	−0.3476	23	0.4772	17	0.0029	degré
P	1.4609	22	17.5978	2 120	0.0029	degré
L	−0.005 482	26	−0.269 369	22	0.000 057	degré

et le nombre de termes des séries pour un niveau de troncature donné. Ces quantités permettent d'estimer la précision avec laquelle les éléments moyens de la table 8.3.2 peuvent être utilisés comme approximation des éléments osculateurs. On voit, en particulier, que pour Déimos, en raison de la faible valeur de l'excentricité, la longitude du périastre converge mal. Il sera donc préférable, pour un calcul approché, de considérer l'orbite de Déimos comme circulaire. Par contre, pour le calcul de la longitude moyenne de ce satellite, on aura intérêt à tenir compte du premier terme périodique $-0°.269\,369 \sin \overline{h}$ avec :

$$\overline{h} = 11°.20 - 0°.018\,001\, t,$$

le coefficient de ce terme étant d'un ordre de grandeur dix fois supérieur à celui du terme suivant.

On passe des éléments de Struve aux coordonnées rectangulaires x^A_{2000}, y^A_{2000}, z^A_{2000}, rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens J2000, au moyen de la transformation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x^A_{2000} \\ y^A_{2000} \\ z^A_{2000} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos N_a & -\sin N_a \cos J_a & \sin N_a \sin J_a \\ \sin N_a & \cos N_a \cos J_a & -\cos N_a \sin J_a \\ 0 & \sin J_a & \cos J_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \sin^2 K(1-\cos I) & \sin K \cos K(1-\cos I) \\ \sin K \cos K(1-\cos I) & 1-\cos^2 K(1-\cos I) \\ -\sin K \sin I & \cos K \sin I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r\cos(v + P - N_a) \\ r\sin(v + P - N_a) \end{pmatrix},$$

l'anomalie vraie v et le rayon vecteur r étant calculés à partir de l'anomalie moyenne $L - P$ et de l'excentricité e par les formules du problème des deux corps.

8.4. LES SATELLITES GALILÉENS

8.4.1. Historique

Découverts au début de janvier 1610 par Galilée (d'où leur nom de satellites galiléens), les quatre satellites de Jupiter les plus massifs sont, dans l'ordre des distances à la planète, Io, Europe, Ganymède et Callisto. Avec la Lune, le satellite de Saturne Titan et le satellite de Neptune Triton, ils appartiennent à un ensemble de satellites géants, de masses absolues notablement supérieures à celles de tous les autres satellites du système solaire et de taille comparable aux planètes Mercure ou Mars. Leurs masses relatives à celle de la planète sont également les plus grandes, exception faite de celles de la Lune et de Triton.

Ce système de satellites a joué un rôle historique et philosophique important puisqu'il fut, dès sa découverte, présenté comme une confirmation de l'hypothèse de Copernic par ses défenseurs. Leurs éclipses par Jupiter furent l'objet de nombreuses observations qui amenèrent Roemer, en 1676, à découvrir la vitesse finie de la lumière (*cf.* 7.2.1). À partir de leur découverte, puis lors des étapes importantes de la mécanique céleste, les mouvements de ces satellites ont été l'objet de nombreuses modélisations.

Il s'agissait tout d'abord d'extrapolations empiriques des observations réalisées ; les premières tables des satellites galiléens, notamment celles de Galilée, Hodierna et Borelli, proviennent ainsi d'une analyse purement cinématique des mouvements observés. La précision de ces premières tables est évidemment médiocre, un certain progrès apparaissant avec celles de Cassini. Plus élaborés sont les travaux de Halley, Bradley et surtout Wargentin. Toutes ces tables sont issues de l'analyse directe des observations d'éclipses.

Viennent ensuite des prédictions fondées sur des théories gravitationnelles dont les paramètres sont déduits de ce même type d'observations. Les premiers travaux théoriques sont ceux de Newton qui a appliqué à Callisto les méthodes qu'il avait développées dans l'étude du mouvement de la Lune. On note ensuite les contributions de Walmsley (1758) et d'Euler qui analysent l'effet de l'aplatissement de la planète, puis de Bailly (1766), qui fait usage des travaux de Clairaut à propos de la Lune.

Les recherches théoriques de Lagrange relatives au problème planétaire ont conduit à modéliser l'évolution à long terme des orbites par un système différentiel linéaire qui couple les excentricités et les inclinaisons. Ce résultat fondamental, appliqué au système galiléen, a permis à Lagrange d'établir l'existence de quatre équations du centre affectant la longitude de chacun des satellites.

Bradley et Wargentin avaient mis en évidence une inégalité périodique de période 437 jours dans les époques des éclipses des trois premiers satellites. Ce sont Bailly et Lagrange qui ont justifié théoriquement ce phénomène lié à des termes quasi-résonants.

Dans sa *Mécanique Céleste*, Laplace (1788b) propose la première théorie complète de la dynamique du système galiléen. Il établit notamment deux théorèmes qui assurent l'existence de la relation de résonance liant les longitudes moyennes l_1, l_2 et l_3 des trois premiers satellites :

$$l_1 - 3l_2 + 2l_3 = \pi.$$

Il vérifie également la stabilité de cette relation.

Table 8.4.1. Évolution des prédictions publiées dans la *Connaissance des Temps.*

Dates	Positions	Phénomènes	Configurations
1679-1689	La *Connaissance des Temps* ne publie	pas de données relatives aux	satellites galiléens
1690-1729	Néant	Éclipses de Io d'après les tables de Cassini (sauf de 1694 à 1697)	Néant
1730-1733	Néant	Éclipses des quatre satellites. Les tables de Cassini sont améliorées par Maraldi	Néant
1734	Néant	Éclipses de Io seul	Néant
1735-1759	Néant	Éclipses des quatre satellites	Figures sous forme de points isolés avec parfois des indications sommaires des latitudes
1760-1792	Néant	Utilisation des tables de Wargentin revues par Lalande. Éclipses et, à partir de 1770, conjonctions	Idem (figures omises dans la période 1776-1778)
1793-1840	Néant	Utilisation des tables de Delambre fondées sur la théorie de Laplace	Idem (figures omises dans les périodes 1799-1802 et 1816-1840)
1841-1914	Néant	Utilisation des tables de Damoiseau. Éclipses et, à partir de 1891, ombres, passages et occultations	Idem (figures omises dans la période 1911-1914)
1915-1917	Tables de Sampson. Fonctions permettant le calcul des coordonnées différentielles (méthode de Schulhof et Andoyer)	Tables de Sampson : tous phénomènes	Idem
1918-1960	Idem	Idem	Utilisation des tables de Sampson
1961-1970	Idem	Idem	Courbes continues
1971-1979	Idem	Théorie de Sampson informatisée	Idem

Table 8.4.1. (fin).

Dates	Positions	Phénomènes	Configurations
1980-1983	Polynômes de Tchebychev (théorie de Sampson SV2)	Prédictions détaillées. (1) Forme polynomiale. (2)	Prise en compte de l'inclinaison apparente des orbites (1)
1984-1995	Idem (théorie de Sampson G-5)	Idem	Idem
1996-	Coefficients de fonctions mixtes (théorie de Sampson G-5)	Prédictions détaillées (1) Forme polynomiale	Idem

(1) : Données publiées dans un *Supplément à la Connaissance des Temps relatif aux satellites galiléens*

(2) : Données publiées dans un *Supplément à la Connaissance des Temps relatif aux satellites des planètes Mars, Jupiter, Saturne et Uranus*

Le travail de Laplace a été complété par Souillart (1880), notamment par l'introduction de l'effet des planètes autres que Jupiter et par le calcul de termes quasi-résonants d'ordre supérieur. Ces résultats sont présentés en détail dans Tisserand (1896).

Delambre a, le premier, déduit des tables de cette théorie gravitationnelle de Laplace. Ces prédictions ont été prolongées ensuite par Damoiseau puis par Adams et Potter.

À la fin du dix-neuvième siècle, deux nouvelles lignes de recherche ont été explorées pour améliorer les résultats de Laplace. De Sitter (1918) a exploité des suggestions théoriques de Poincaré pour construire une méthode originale qui n'a malheureusement pas été menée jusqu'au bout. Par ailleurs, la théorie de Sampson (1910a, 1910b, 1921) a abouti à des tables et, avec quelques améliorations, est encore à la base du calcul des éphémérides.

Plus récemment, il convient de citer les travaux de Ferraz-Mello (1966) généralisant la méthode de Hill pour le mouvement de la Lune, continués par Sagnier (1981), puis Vu (1986). Dans une autre direction, Marsden (1966) a employé la méthode de von Zeipel. Enfin Lieske (1977, 1980) a amélioré la théorie de Sampson puis Arlot (1982) en a fait une nouvelle détermination des paramètres.

La publication d'éphémérides de position ou de prédictions d'époques de phénomènes, ou de graphiques représentant les configurations du système, est une tradition de la *Connaissance des Temps* depuis 1690. L'évolution de la présentation de ces données au cours du temps est décrite dans la table 8.4.1.

Notons que depuis 1915 le Bureau des longitudes a été chargé de la publication des éphémérides des satellites galiléens à partir de la théorie de Sampson par le Congrès international des éphémérides astronomiques (Paris, 23 - 26 octobre 1911).

Les éphémérides actuelles, si elles sont encore basées sur cette théorie, sont cependant directement calculées à partir des expressions analytiques de la théorie des mouvements. De 1980 à 1983 les prédictions relatives aux satellites galiléens étaient calculées grâce à des éphémérides de ce type nommées SV2 (Vu et Sagnier, 1974, Vu, 1977). Les éphémérides plus récentes, E-2 de Lieske (1980) et G-5 de Arlot (1982), sont ajustées maintenant sur de nombreuses observations photographiques plus précises que les observations d'éclipses.

8.4.2. Théorie des mouvements des satellites galiléens

8.4.2.1. Introduction

Parmi les 16 satellites connus de Jupiter, les satellites galiléens forment un groupe à interactions importantes dont le mouvement théorique peut être étudié en négligeant l'influence des autres satellites de la planète, de masses beaucoup plus faibles. En raison de l'existence de ces perturbations mutuelles très fortes, les théories dont sont issues les éphémérides traitent toujours ce système de satellites dans son ensemble.

8.4.2.2. Généralités sur les mouvements

Le paragraphe 2.4 de cet ouvrage fournit des données orbitales et physiques précises sur les satellites galiléens ; ces données montrent le caractère exceptionnel du système galiléen parmi les autres corps du système solaire.

Les satellites galiléens de Jupiter, Io, Europe, Ganymède, Callisto (également dénommés J1, J2, J3 et J4) ont des tailles comparables à celles de la Lune, de Mars ou de Mercure. Le plus petit, Europe, et le plus gros, Ganymède, ont des masses évaluées respectivement à 0.65 et 2.02 fois celle de la Lune. Dans le champ gravitationnel très fort de Jupiter, ces satellites tournent vite : Io, à la distance de 422 000 km de Jupiter boucle son orbite en moins de 2 jours. La figure 8.4.1 montre le système des satellites galiléens projeté sur le plan équatorial de Jupiter et en donne l'échelle.

Comme tout corps céleste, chacun des satellites galiléens a deux mouvements, un mouvement de rotation sur lui-même et un mouvement de gravitation sur une orbite autour d'un corps central qui est ici la planète Jupiter. Comme dans le cas de la Lune qui fait une rotation sur elle-même en 27.3 jours et une révolution orbitale autour de la Terre en 27.3 jours également, le mouvement de rotation des satellites galiléens est synchrone : chacun des satellites galiléens a une période de rotation égale à celle de sa révolution moyenne autour de Jupiter.

Toutes les orbites du système galiléen ont leurs plans très faiblement inclinés par rapport au plan de l'équateur de la planète. La plus grande inclinaison, celle du plan de l'orbite de Callisto, ne dépasse pas $0°.8$.

Les excentricités des orbites se composent de deux parties : une excentricité libre qui est faible, et une excentricité forcée due à l'existence des relations de résonance qui entraîne des variations importantes de l'excentricité résultante pour les trois premiers satellites. L'excentricité forcée du satellite Io, par exemple, est 100 fois plus grande que son excentricité libre.

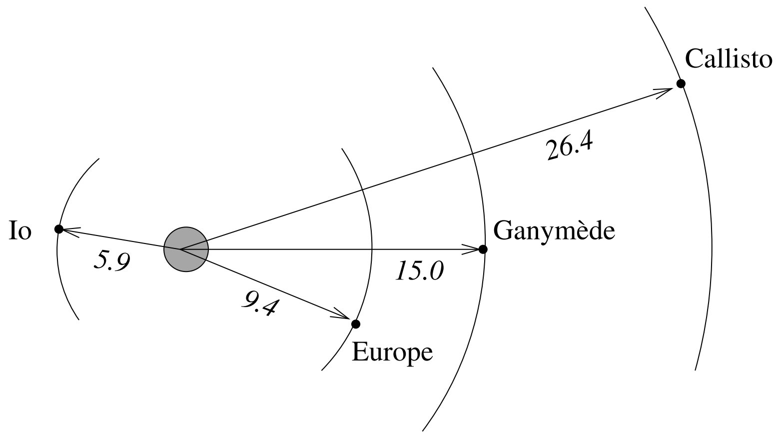

Fig. 8.4.1. Le système des satellites galiléens projeté sur le plan équatorial de Jupiter. Les distances moyennes des satellites au centre de Jupiter sont données en rayon équatorial de la planète.

Depuis la Terre, l'observateur voit ces orbites sous la forme d'ellipses très aplaties du fait que leurs plans sont très faiblement inclinés sur le plan de l'équateur de Jupiter et du fait que la direction Terre-Jupiter est, elle aussi, très faiblement inclinée sur ce plan. Ces faibles inclinaisons expliquent l'existence de phénomènes d'éclipses, d'occultations, de passages d'ombre et de passages devant la planète, qui sont décrits plus explicitement en 8.4.3.

Les mouvements des satellites galiléens sur ces orbites sont caractérisés par l'existence de plusieurs résonances. La plus célèbre est la relation liant les moyens mouvements des trois premiers satellites $n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0$. Elle engendre la libration de Laplace qui concerne les longitudes vraies ν_1, ν_2 et ν_3 des trois premiers satellites et se manifeste par une oscillation de très faible amplitude autour de 180° de la quantité $\nu_1 - 3\nu_2 + 2\nu_3$.

Cette relation caractérisant la libration explique notamment l'impossibilité théorique d'avoir une triple conjonction de ces satellites. Quand deux de ces trois satellites sont alignés avec Jupiter, on se trouve nécessairement devant une des trois configurations de la figure 8.4.2.

La résonance laplacienne résulte en fait de la combinaison de deux résonances de premier ordre liant les couples Io-Europe et Europe-Ganymède. On peut les exprimer grâce à la relation de commensurabilité $n_1 - 2n_2 = n_2 - 2n_3 = 0°.740/\mathrm{j}$ qui relie les moyens mouvements de ces satellites.

Une autre relation de résonance relie les moyens mouvements de Ganymède et de Callisto, il s'agit de la relation $3n_3 - 7n_4 = -0°.045/\mathrm{j}$ mise en évidence par De Haerdtl en 1892 et dont les conséquences théoriques ont pour la première fois été introduites par Lieske (1973).

D'autres relations de résonance régissent les mouvements des satellites galiléens, on peut citer les librations autour de 0 des quantités $\nu_1 - 2\nu_2 + \pi_1$ et $\nu_2 - 2\nu_3 + \pi_2$ et la libration autour de

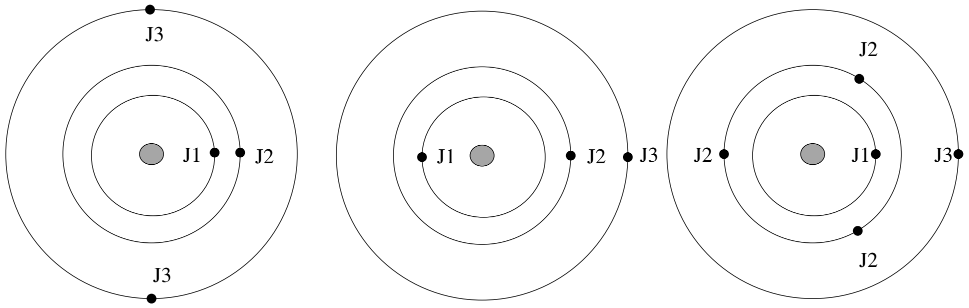

Fig. 8.4.2. Configurations possibles des trois premiers satellites galiléens sur leurs orbites quand deux d'entre eux sont alignés avec Jupiter.

180°de la quantité $\nu_1 - 2\nu_2 + \pi_2$, où π_1 et π_2 désignent les longitudes des périjoves de Io et Europe. Différents auteurs peuvent être consultés pour avoir plus de détails sur ce sujet, citons par exemple Greenberg (1982), Peale (1986) ou Ferraz-Mello (1987).

Les orbites des satellites galiléens telles que nous venons de les décrire brièvement semblent être en très lente évolution. En effet, les dernières missions spatiales vers Jupiter, réalisées grâce aux sondes Pioneer et Voyager, ont permis de faire de grands progrès dans notre connaissance de la nature physique des satellites galiléens et ont permis également de réaliser des progrès dans le domaine de leur dynamique. Morrison (1982) et Burns et Matthews (1986) donnent un aperçu très complet des progrès réalisés grâce à ces missions spatiales vers le système galiléen.

Plusieurs études récentes de dynamique ont été motivées par les nombreuses données recueillies au cours de ces missions. Les sujets principaux de ces études sont l'interaction entre Io et Jupiter et l'origine et l'évolution à très long terme du système des satellites.

Il faut en particulier souligner l'existence de forts effets de marées entre Io et Jupiter, dus à l'action gravitationnelle différentielle sur ce satellite. Ces effets sont à l'origine d'une accélération séculaire de Io. Cette accélération serait probablement également présente dans le mouvement des satellites Europe et Ganymède, en raison des résonances orbitales. Elle se manifesterait par une lente déformation des orbites. La mise en évidence de ce phénomène est cependant difficile, elle fait actuellement l'objet de travaux. La table 8.4.2 donne les valeurs de ces accélérations trouvées par Goldstein et Jacobs (1986), Lieske (1987) et Vasundhara et al. (1995).

8.4.2.3. La théorie des mouvements

Le mouvement des satellites galiléens est proche d'un mouvement képlérien sur des ellipses de très faibles excentricités. La théorie des mouvements peut donner des expressions permettant de

Table 8.4.2. Différentes valeurs des accélérations séculaires des satellites galiléens (en $10^{-11}\mathrm{an}^{-1}$).

	Goldstein et Jacobs	Lieske	Vasundhara et al.
$\frac{1}{n_1}\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}t}$	81 ± 29	-0.74 ± 0.87	22 ± 7
$\frac{1}{n_2}\frac{\mathrm{d}n_2}{\mathrm{d}t}$		-0.82 ± 0.97	
$\frac{1}{n_3}\frac{\mathrm{d}n_3}{\mathrm{d}t}$		-0.98 ± 1.53	

calculer à chaque instant les écarts entre une orbite vraie et une ellipse de référence relative au cas non perturbé.

Le but est alors, soit de construire des éphémérides, soit d'analyser des observations de positions ou de phénomènes. Il ne s'agit donc pas d'étudier le comportement du système galiléen à très long terme (origine, évolution sur plusieurs milliers d'années) mais d'effectuer des calculs de prévisions valables à court ou moyen terme.

Une comparaison de la période de révolution sidérale de Io (1.77 jours) à celle de Jupiter (4333 jours) met en évidence le fait qu'une durée de validité sur 1000 ans d'une théorie des grosses planètes extérieures correspond à une durée de 5 mois pour une théorie de même type dans le cas des satellites galiléens de Jupiter. Ceci explique la difficulté de modéliser avec précision ces mouvements rapides sur une longue durée de validité (plusieurs centaines d'années).

La première modélisation dynamique de ces mouvements est due à Laplace qui explique les caractéristiques principales des orbites. On trouve dans Tisserand (1896) ou Ferraz-Mello (1979) une description précise de ce type de théorie des mouvements.

Les éphémérides de la *Connaissance des Temps* sont fondées sur la théorie de Sampson (1921), améliorée par Lieske (1974, 1977, 1978, 1980, 1987), et dont les constantes sont issues d'une analyse d'observations photographiques modernes due à Arlot (1982). C'est une théorie semi-analytique fondée sur la méthode de Hansen.

Les variables et le plan de référence

Dans un mouvement elliptique d'un corps autour d'un corps central plus massif, on prend habituellement le centre du corps central comme origine des coordonnées et si à un instant t_0 on donne les trois composantes de la position et les trois composantes de la vitesse, le mouvement est parfaitement défini. On peut calculer, à partir de ces données, les six éléments elliptiques de ce mouvement. Dans ce mouvement non perturbé, les éléments de l'orbite sont tous des constantes, à l'exception de la longitude moyenne qui est linéaire en fonction du temps. L'orbite périodique est alors une ellipse fixe.

Ce modèle de mouvement à six éléments d'orbite est aussi utilisé dans le cas perturbé. Les éléments sont appelés alors les *éléments osculateurs*. Ils ne sont plus constants, mais comportent des inégalités périodiques provenant des effets des forces perturbatrices. Dans la mise en équations, ces éléments sont des variables dont on étudie les variations en fonction du temps.

Le choix des variables des quatre satellites galiléens dans la théorie de Sampson (1921) est particulier puisqu'il repère la position jovicentrique d'un satellite dans un repère équatorial, non pas par ses éléments elliptiques mais par ses coordonnées cylindriques ρ, $\nu - \psi$, et z (Fig. 8.4.3).

Les plans fixes, orbite de Jupiter, équateur céleste et écliptique, sont rapportés à une date fixe (1900.0 dans la théorie de Sampson, 1950.0 dans celle de Lieske). Le point d'origine de la variable ν est le point vernal, on a la relation $\psi = \gamma\mathrm{A} + \mathrm{AN}$ (Fig. 8.4.3). Le choix de l'équateur jovien comme plan de référence est imposé par l'étude de l'action du potentiel de Jupiter, ellipsoïde aplati ; il permet de simplifier le développement de la fonction perturbatrice due à l'aplatissement. Sampson tient compte du fait que ce repère n'est pas inertiel en ajoutant des quantités complémentaires dans la fonction perturbatrice.

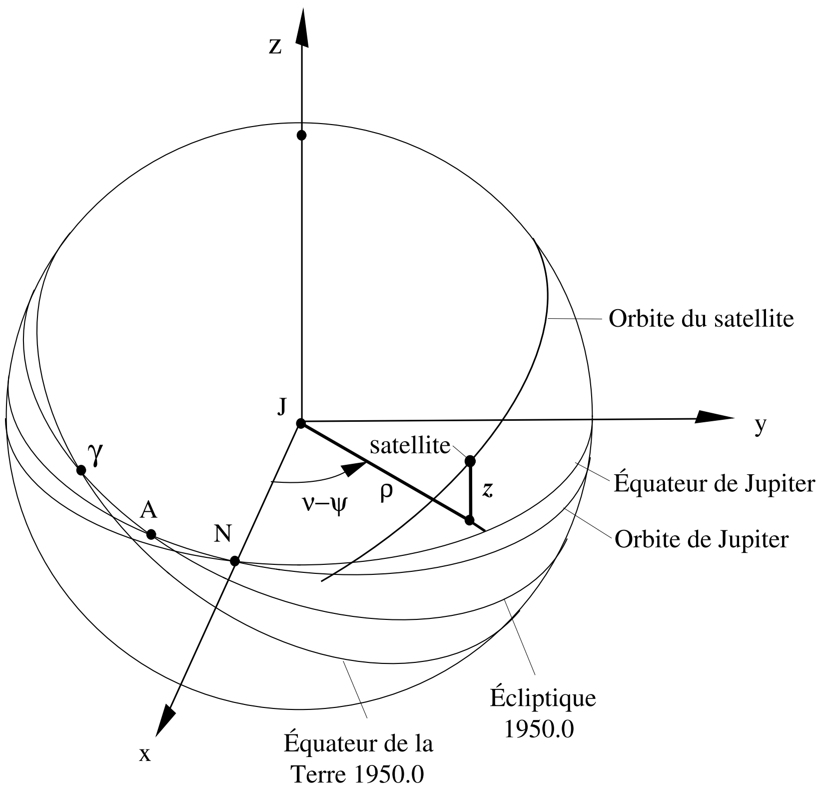

Fig. 8.4.3. Définition des variables.

Les perturbations

Les satellites galiléens subissent dans leur mouvement des perturbations de plusieurs types.

• Perturbation par la forme physique du corps central : c'est le type de perturbation subie par tout satellite naturel ou artificiel en mouvement sur une orbite basse. Jupiter n'est pas sphérique, la présence de son renflement équatorial est source de perturbation.

• Perturbation par la présence des autres satellites : cette perturbation, encore appelée interaction, ressemble à celle du problème du mouvement planétaire. Le corps étudié est perturbé simultanément par la présence des autres corps du même système.

• Perturbation par la présence du Soleil : cette perturbation est identique à celle subie par la Lune. Les satellites galiléens en orbite autour de Jupiter, en particulier Callisto et Ganymède, sont perturbés dans leur mouvement par le Soleil considéré comme corps extérieur.

• Perturbation due à Saturne : la perturbation directe n'est pas assez sensible sur le mouvement des satellites galiléens pour être considérée, il est cependant nécessaire de tenir compte des perturbations indirectes ce qui se traduit par la présence de termes périodiques, restreints aux deux inégalités principales, dans le mouvement de Jupiter (termes en $\lambda_J - 2\lambda_S$ et $2\lambda_J - 5\lambda_S$ où λ_S et λ_J désignent les longitudes moyennes de Saturne et Jupiter).

On trouve donc trois types de perturbation réunis dans la théorie des satellites galiléens, celles propres aux satellites, celles de type planétaire et celles de type lunaire. L'action de ces différentes perturbations donne de nombreuses inégalités périodiques dans les expressions des coordonnées.

Développement de la fonction perturbatrice

La fonction perturbatrice F est une somme de termes respectivement dus à l'action de Jupiter F_J, à celle du Soleil F_S, et à celle des autres satellites F_{jk}.

Avec deux hypothèses simplificatrices concernant une symétrie de révolution autour de l'axe polaire et une symétrie par rapport au plan équatorial, le potentiel de Jupiter peut être mis sous la forme :

$$U = G\frac{1+m}{r}[1 - J_2(\frac{a_e}{r})^2 P_2(\frac{z}{r}) - J_4(\frac{a_e}{r})^4 P_4(\frac{z}{r})],$$

soit

$$U = G\frac{1+m}{r} + F_J,$$

où G est la constante de la gravitation, m la masse du satellite perturbé, la masse de Jupiter étant prise égale à l'unité, r le module du vecteur position du satellite, a_e le rayon équatorial de Jupiter, J_2 et J_4 les deux premiers harmoniques zonaux du potentiel de Jupiter, P les polynômes de Legendre. Le premier terme correspond au mouvement principal képlérien du satellite, les autres termes correspondent à la perturbation F_J due à la forme et à la répartition des masses à l'intérieur de Jupiter.

La fonction perturbatrice due à l'action du Soleil est de la forme :

$$F_S = GM(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{R}.\mathbf{r}}{R^3}),$$

où M est la masse du Soleil, Δ la distance satellite-Soleil, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{r}$ les vecteurs positions du Soleil et du satellite. On en effectue le développement par rapport à la petite quantité $\frac{r}{R}$, et en fonction de l'angle S défini par les vecteurs positions jovicentriques du satellite et du Soleil, suivant l'expression :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{R})^n P_n(\cos S).$$

Enfin, la fonction perturbatrice du satellite k sur le mouvement du satellite j est de la forme :

$$F_{jk} = Gm_k(\frac{1}{\Delta_{jk}} - \frac{\mathbf{r}_j.\mathbf{r}_k}{{r_k}^3}),$$

elle se développe de façon plus complexe du fait que $\frac{r_k}{r_j}$ n'est pas une petite quantité. Son développement se fait au moyen de fonctions appelées coefficients de Laplace.

Mise en équations et forme de la solution

Sampson, pour ses variables ρ, ν, z relatives à chaque satellite, donne les trois équations du mouvement sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{dt}^2} - \rho(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{dt}})^2 = \frac{\partial}{\partial\rho}[\frac{1+m}{\rho} + F] + \Xi$$

$$2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{dt}} + \rho\frac{\mathrm{d}^2\nu}{\mathrm{dt}^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\nu} + H$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{dt}^2} = \frac{\partial F}{\partial z} + Z,$$

où Ξ, H, Z sont les composantes des forces complémentaires dues au mouvement du repère équatorial Jxyz. Sampson pose :

$$\rho = a(1+\xi),$$

$$\nu = l + \upsilon,$$

$$z = a\zeta,$$

où a est une constante et l la longitude moyenne.

Il prend comme nouvelles variables du problème les petites quantités ξ, υ et ζ qui représentent en fait les séries des inégalités des coordonnées cylindriques du satellite perturbé considéré.

Après avoir développé les seconds membres des équations, trois types de termes se présentent : les termes périodiques ordinaires dépendant du temps et dont l'intégration se fait par quadrature, les termes autonomes (ne dépendant pas explicitement du temps) qui apparaîssent dans les équations relatives aux rayons vecteurs et dans les équations relatives aux latitudes, enfin les termes de libration.

Les termes de libration ont une pulsation faible et a priori inconnue, ils ne sont pas intégrables directement par rapport au temps. La résolution du problème s'effectue en trois étapes.

Dans la première étape, la résolution du système autonome donne les coefficients du temps des longitudes des périjoves et ceux des longitudes des nœuds des orbites. Ce résultat permet de calculer par la suite les arguments des termes périodiques contenant ces longitudes.

Dans la deuxième étape, on laisse à l'écart les termes de libration. L'intégration des termes périodiques ordinaires fournit une première solution qui peut être appelée *solution hors résonance*.

Dans la dernière étape, on aborde le traitement des termes de libration omis précédemment. Elle complète la solution par de nouvelles contributions ou corrections provenant de la présence de la libration.

Traitement des résonances

La théorie distingue deux types de résonance. La résonance exacte qui est la libration de Laplace appartient au domaine de mouvement dit libre et se manifeste concrètement par le fait que l'amplitude et la phase de la libration ne sont pas calculables par la théorie mais s'obtiennent par l'observation. Le calcul fournit seulement la période et la répartition des effets de la libration parmi les satellites concernés.

Les longitudes vraies des trois satellites en libration sont liées par la relation :

$$\nu_1 - 3\nu_2 + 2\nu_3 = 180° + \lambda,$$

où λ représente la longitude de la libration. L'extraction des termes de libration des deux membres des équations générales fournit l'équation suivante, appelée équation de la libration :

$$\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{dt}^2} = -L_1 \sin\lambda + L_2 \sin 2\lambda,$$

où L_1 et L_2 sont des coefficients numériques.

λ étant faible, Sampson admet que $\sin\lambda = \lambda$, $\sin 2\lambda = 2\lambda$ et obtient l'équation de la libration sous une forme très simple :

$$\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{dt}^2} = -L\lambda,$$

qui fournit la solution :

$$\lambda = \mathcal{L}\sin(\beta t + \phi),$$

où la pulsation β est égale à $\sqrt{L}$ et où l'amplitude $\mathcal{L}$ et la phase ϕ de la libration sont des constantes d'intégration définies lors de la comparaison à l'observation. Lieske, dans sa version E-2 (Lieske, 1980), trouve, pour $\mathcal{L}$, la valeur 0°.0657. Le résultat de Sampson (1921) pour la valeur de la période de la libration est de 2041 jours. Lieske (1980) donne 2074 jours. La libration introduit directement un nouveau terme dans l'expression de la longitude de chaque satellite concerné ; pour Europe par exemple, c'est un terme non négligeable qui a pour amplitude 213 km.

Les effets indirects de la libration sont nombreux. Certains sont très faibles comme les modifications des perturbations séculaires des moyens mouvements et celles des demi-grands axes. Les changements notables sont les corrections portées sur les termes ayant des périodes proches de celle de la libration. On peut prendre comme exemple les termes ayant pour argument l'anomalie moyenne de Jupiter dans les longitudes des trois satellites. Les corrections en amplitude représentent respectivement 14 km, 42 km et 6 km sur les positions.

Les autres résonances du problème sont dues aux variations très lentes des arguments $l_1 - 2l_2$, $l_2 - 2l_3$, $3l_3 - 7l_4$ et correspondent au mouvement forcé. Les deux premières résonances fournissent les inégalités les plus importantes dans les longitudes des satellites concernés. Les amplitudes de ces inégalités représentent approximativement 3500 km, 12 500 km et 1300 km sur les positions des satellites Io, Europe et Ganymède.

Les termes résonants en $3l_3 - 7l_4$ ont été calculés pour la première fois par De Haerdtl (1892), ce sont des termes de degré 4 des variables. La présence de ces termes est signalée par Sampson(1921) mais ils n'ont été introduits dans la théorie que plus tard par Lieske (1977). La partie principale de l'argument a pour expression $3l_3 - 7l_4$ et varie très lentement en fonction du temps. Les amplitudes de ces termes sont de l'ordre de 15 km et 39 km sur les positions respectives des satellites Ganymède et Callisto.

8.4.2.4. Élaboration des éphémérides

Le repérage d'un satellite planétaire dans l'espace se fait habituellement grâce aux coordonnées équatoriales apparentes : le repère correspondant a l'équateur céleste vrai comme plan de référence, les positions sont apparentes car on tient compte d'une correction imputée à la durée du trajet de la lumière. Plusieurs transformations simples de repère permettent de transformer les coordonnées des satellites, qui sont fournies par la théorie dans un repère jovicentrique équatorial, en ces coordonnées équatoriales apparentes.

Le mouvement très rapide des satellites de Jupiter impose d'importantes contraintes sur la forme des éphémérides à publier. La forme la plus classique de présentation consistant à tabuler les positions de ces corps à intervalles réguliers doit être écartée car elle entraînerait chaque année la publication d'un nombre de pages considérable. Dans le passé on publia donc des tables de quantités intermédiaires permettant le calcul des coordonnées des satellites.

De 1915 à 1979, le Bureau des longitudes a adopté la représentation préconisée par Andoyer (1915). La position relative d'un satellite par rapport au centre de Jupiter y était représentée par deux quantités qui sont d'une part la différence des ascensions droites et d'autre part celle des déclinaisons. Ce calcul utilisait sept tables de fonctions donnant notamment : la distance de Jupiter à la Terre, les temps d'aberration de Jupiter, les longitudes des satellites et les principales corrections, les rayons vecteurs, les inégalités principales de la longitude. On voit donc la difficulté d'obtenir rapidement plusieurs positions des satellites. La précision peut également être dégradée après des calculs aussi longs.

De 1980 à 1995, le Bureau des longitudes a adopté pour la *Connaissance des Temps* une représentation des éphémérides des satellites galiléens sous forme de polynômes de Tchebychev (Vu, 1977) qui permet de réduire considérablement le nombre de pages publiées tout en préservant une très bonne précision. Les deux avantages par rapport à la présentation d'Andoyer sont la rapidité du calcul et la précision des résultats. Deux tables de coefficients de Tchebychev ont été publiées. Elles permettent de calculer les deux coordonnées différentielles de chaque satellite par rapport au centre de Jupiter. La représentation d'une éphéméride en polynômes de Tchebychev est décrite en 9.1.3.

De 1990 à 1995 une nouvelle représentation, la représentation par des fonctions mixtes (Chapront et Vu, 1984 ; Arlot et al., 1986), a été utilisée dans des *Suppléments à la Connaissance des Temps* relatifs aux satellites naturels. Depuis 1996, c'est sous cette forme que les éphémérides

des satellites galiléens sont publiées dans la *Connaissance des Temps*. Cette représentation est décrite en 9.1.4.

8.4.3. Les phénomènes des satellites galiléens

Les phénomènes des satellites galiléens de Jupiter, éclipses, occultations, passages et passages d'ombre, ont été observés rapidement après la découverte de ces satellites. Les éclipses, en particulier, ont été longtemps utilisées pour la détermination des constantes des théories de leur mouvement.

Ces observations ont été supplantées au début du siècle par les observations photographiques de position qui se sont révélées plus précises. Cependant, de par leur ancienneté et leur grand nombre, ces observations présentent le grand intérêt de permettre l'étude du comportement à long terme des mouvements des satellites galiléens (Arlot et al., 1984 ; Fairhead et al., 1986, 1987 ; Lieske, 1986a, 1986b, 1987).

Les paragraphes suivants décrivent brièvement le calcul de ces prédictions particulières. On trouvera dans une *Note scientifique et technique du Bureau des longitudes* (Thuillot, 1989) des détails techniques complémentaires sur ce type de calcul et sur la forme polynomiale utilisée dans la *Connaissance des Temps*.

8.4.3.1. Définitions

Au cours de la révolution d'un satellite galiléen autour de Jupiter, un observateur terrestre peut observer des éclipses, des passages de l'ombre du satellite projetée sur la planète, des occultations par la planète, et des passages du satellite devant la planète. Ces quatre types de phénomènes se produisent lors de la traversée par le satellite du cône d'ombre engendré par l'éclairement solaire, et lors de celle du cône de visibilité suivant lequel Jupiter occulte une portion de l'espace pour un observateur terrestre (Fig. 8.4.4).

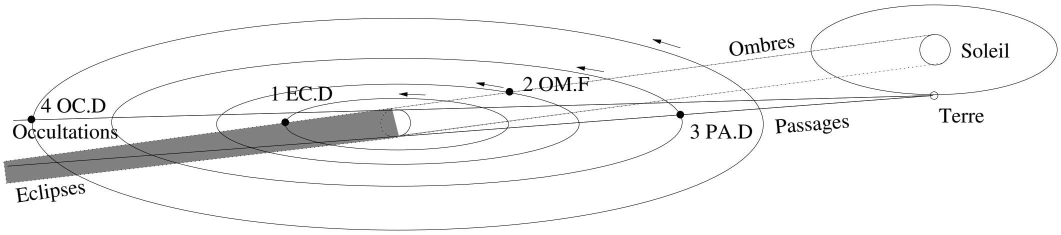

Fig. 8.4.4. Définition des débuts et fins des phénomènes.

Les prédictions des phénomènes telles qu'elles sont publiées dans la *Connaissance des Temps* et dans la plupart des autres éphémérides utilisent, pour modéliser ces phénomènes, des surfaces coniques fictives s'appuyant sur un ellipsoïde aplati représentant Jupiter. Dans ces calculs le cône d'ombre est ainsi la surface engendrée par le faisceau des tangentes à l'ellipsoïde et passant par le centre du Soleil. Le cône de visibilité est, de même, la surface engendrée par le faisceau des tangentes à l'ellipsoïde et passant par le centre de la Terre.

Ce modèle, qui n'a pas pour but la réduction d'observations mais le calcul de prédictions, ne tient pas compte de l'existence d'une zone de pénombre, le Soleil étant en effet réduit à son centre. Il en est d'ailleurs de même pour les satellites et pour la Terre.

On observe un début (EC.D) puis une fin d'éclipse (EC.F) lorsqu'un satellite pénètre dans le cône d'ombre de Jupiter, du côté opposé au Soleil, puis en sort. On observe un début (OM.D) puis une fin de passage d'ombre (OM.F) lorsque ce satellite pénètre dans ce même cône du côté du Soleil, puis en sort. On observe un début (OC.D) puis une fin d'occultation (OC.F) lorsque le satellite pénètre dans le cône de visibilité du côté opposé à la Terre, puis en sort. On observe un début (PA.D) puis une fin de passage devant la planète (PA.F) lorsqu'il pénètre dans ce même cône du côté de la Terre, puis en sort (Fig. 8.4.4).

La faible inclinaison des orbites des satellites galiléens sur l'écliptique explique l'existence de ces phénomènes pour chaque révolution de Io, Europe et Ganymède autour de la planète. Callisto, en raison de son éloignement plus grand, n'en présente lui que tous les six ans et pendant trois ans.

Par ailleurs, la configuration géométrique du système galiléen fait que les orbites de Io et Europe se situent dans les zones de recouvrement des cônes d'ombre et de visibilité. Ainsi avant l'opposition de Jupiter on ne peut pas observer les fins d'éclipse puisque le satellite est déjà occulté, ni les débuts d'occultation puisqu'il est encore éclipsé. De même après l'opposition on ne peut pas observer les débuts d'éclipse et les fins d'occultation de ces satellites.

8.4.3.2. Méthode de calcul des dates des phénomènes

Considérons le repère jovicentrique dont le plan fondamental est équatorial et dans lequel sont connues les positions des satellites grâce à la théorie de leur mouvement. On suppose dans un premier temps que la lumière se propage de façon instantanée. Les phénomènes définis précédemment sont alors calculés par approximations successives en recherchant les dates pour lesquelles les satellites, réduits à leur centre, se situent sur les cônes d'ombre et de visibilité.

Si X désigne la colonne des composantes d'un point courant dans ce repère, X_t sa transposée, a_e le rayon équatorial de Jupiter, et si ρ est lié à l'aplatissement dynamique f par la relation :

$$\rho = \frac{1}{(1-f)^2},$$

alors l'ellipsoïde représentant la planète a pour équation matricielle :

$$X_t M X - {a_e}^2 = 0,$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

On peut montrer alors que, si S désigne la colonne des composantes du centre du Soleil et S_t sa transposée, le cône d'ombre de Jupiter a pour équation :

$$(S_t M X - {a_e}^2)^2 - (S_t M S - {a_e}^2)(X_t M X - {a_e}^2) = 0.$$

Rechercher la date d'une éclipse revient à chercher la date pour laquelle la position X d'un satellite, que l'on choisit située du côté opposé au Soleil par rapport à Jupiter, vérifie cette équation ce qui peut s'écrire :

$$\Delta(S, X; a_e, \rho, t) = 0.$$

Supposons la quantité Δ négative à l'intérieur du cône, alors la date de début d'éclipse correspond à la date t pour laquelle Δ s'annule en devenant négatif, la date de fin d'éclipse correspond à la solution pour laquelle cette quantité s'annule en devenant positive. Les dates de début et de fin de passage d'ombre s'obtiennent de même, mais pour des positions de satellite situées du même côté que le Soleil par rapport à Jupiter.

Pour les phénomènes liés au cône de visibilité, les passages et les occultations, on procède de la même façon en remplaçant l'équation précédente par :

$$\Delta(T, X; a_e, \rho, t) = 0,$$

où T désigne la colonne des composantes jovicentriques du centre de la Terre.

8.4.3.3. Compléments dus à l'effet de phase et à l'aberration

Un complément du formulaire précédent est nécessaire pour prendre en compte les effets de phase sur Jupiter. L'angle de phase est l'angle que font les directions jovicentriques de la Terre et du Soleil, il peut atteindre 12°. Son influence sur les dates de certains phénomènes ne peut pas être négligée. Ainsi, avant l'opposition de Jupiter, les dates des débuts de passage d'ombre et celles des fins de passage doivent être corrigées de cet effet, puisqu'on ne peut pas voir l'ombre lorsqu'elle se situe au-delà du limbe, et que le satellite semble finir de passer devant Jupiter dès qu'il franchit le terminateur. Il en est de même après l'opposition pour les débuts de passage devant Jupiter et pour les fins d'ombre. Cette correction se fait dans le formulaire en imposant dans le calcul des dates des passages (ou des ombres) le contact du cône de visibilité (ou de lumière) avec la courbe du terminateur (ou du limbe) au lieu du contact de ce même cône avec l'ellipsoïde représentant Jupiter, ce qui se traduit par une modification des équations en Δ précédentes.

D'autre part les dates exactes de ces phénomènes doivent être calculées en prenant en compte l'effet de la propagation à vitesse finie de la lumière. On distingue essentiellement deux types de corrections. Dans le cas des passages et des occultations, un observateur terrestre voit Jupiter à l'instant t dans la position que la planète occupait à l'instant t corrigé du temps de lumière. C'est ce temps corrigé qui doit être utilisé directement pour la recherche de la position du satellite satisfaisant l'équation du cône de visibilité.

Dans le cas des phénomènes liés au Soleil, la correction est plus complexe. Une éclipse peut être considérée comme étant une occultation du Soleil par Jupiter pour un observateur situé sur le satellite, et les positions jovicentriques du Soleil et du satellite subissent une première correction. L'équation du cône de lumière permet de calculer l'instant t de l'émission du signal. Ce signal est ensuite transmis à la Terre avec le retard dû à la vitesse de la lumière que l'on ajoute à l'instant d'émission calculé. De même on peut considérer qu'un passage d'ombre résulte d'une occultation du Soleil par un satellite, vue de Jupiter, et y appliquer le même ensemble de corrections.

8.4.4. Les phénomènes mutuels des satellites galiléens

8.4.4.1. Introduction

Peu après la découverte des satellites galiléens et l'observation de leurs phénomènes, les astronomes s'aperçurent que des phénomènes similaires se produisaient entre les satellites eux-mêmes. En effet en raison de la nature quasi coplanaire des orbites des quatre satellites, un satellite peut occulter ou éclipser un autre satellite. Malheureusement, la prédiction de ces phénomènes, qui nécessitait une théorie précise et un gros volume de calculs, est restée inaccessible jusqu'à l'apparition des calculateurs électroniques. Ce n'est donc qu'à partir de 1973 que ces phénomènes ont pu être prédits et observés de façon régulière (*cf.*, par exemple, Arlot, 1990).

8.4.4.2. Définitions et circonstances

La figure 8.4.5 montre comment se produisent les phénomènes mutuels. Les orbites des satellites se trouvant très proches du plan équatorial de Jupiter, les occultations mutuelles se produisent lorsque deux satellites et la Terre sont alignés, c'est-à-dire lorsque la déclinaison jovicentrique de la Terre est proche de zéro. De même, les éclipses mutuelles se produisent lorsque deux satellites et le Soleil sont alignés, c'est-à-dire lorsque la déclinaison jovicentrique du Soleil est proche de zéro.

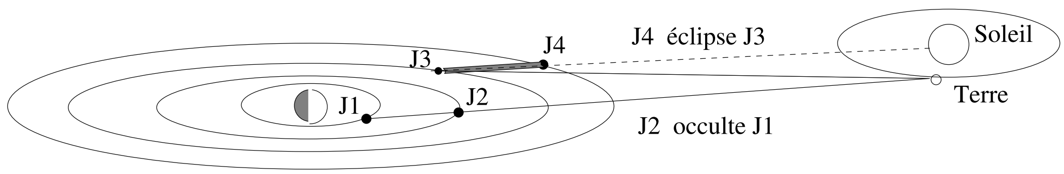

Fig. 8.4.5. Définition des éclipses et occultations mutuelles.

La figure 8.4.6 montre comment évoluent ces déclinaisons jovicentriques lorsqu'elles s'annulent entre 1990 et 2010. Les phénomènes mutuels se produisent au voisinage des dates correspondantes pour lesquelles la Terre et le Soleil traversent le plan de l'équateur de Jupiter, soit tous les six ans. L'observabilité des phénomènes mutuels dépend cependant également d'un autre facteur. En effet, la faible inclinaison relative des quatre orbites des satellites est à l'origine de la courte durée de

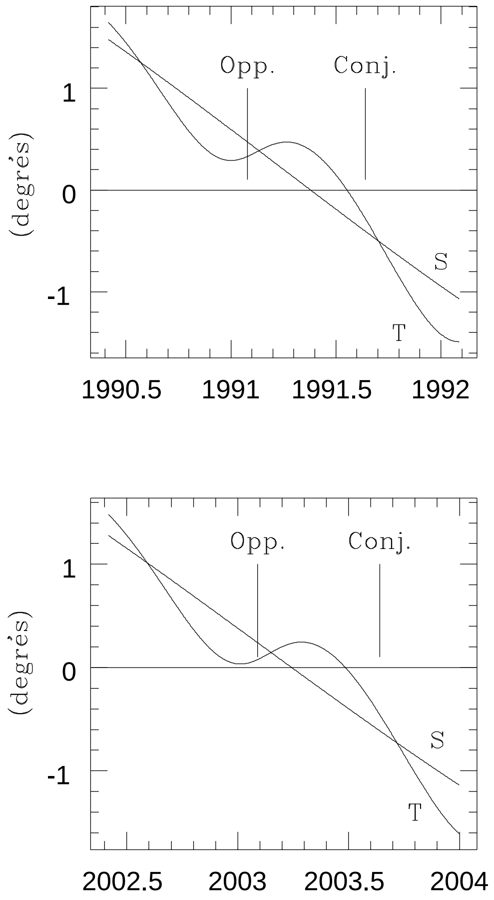

Fig. 8.4.6. Déclinaisons jovicentriques de la Terre (T) et du Soleil (S). (Conj.) et (Opp.) désignent, pour chaque année, les périodes de la conjonction et de l'opposition de Jupiter.

la période où se produisent ces phénomènes, de l'ordre de six mois à un an. Il est alors important que l'opposition de Jupiter et du Soleil se superpose avec la période du maximum de phénomènes.

8.4.4.3. Description des phénomènes mutuels

Les satellites galiléens ayant des diamètres proches mais différents, plusieurs types de phénomènes peuvent se produire. La figure 8.4.7 montre les trois types d'occultation qui peuvent survenir, de façon similaire aux éclipses de Soleil : occultations partielles, annulaires ou totales. Il est à noter que l'effet de parallaxe diurne est très faible (inférieur à $0''.001$) et que ces phénomènes sont donc calculés pour un observateur géocentrique. Les éclipses mutuelles sont, elles, indépendantes de l'observateur terrestre. Ce sont en fait des occultations du Soleil par le satellite éclipsant, vues du satellite éclipsé, et qui sont similaires aux éclipses de Lune. La figure 8.4.8 montre les différents types d'éclipses mutuelles qui peuvent se produire.

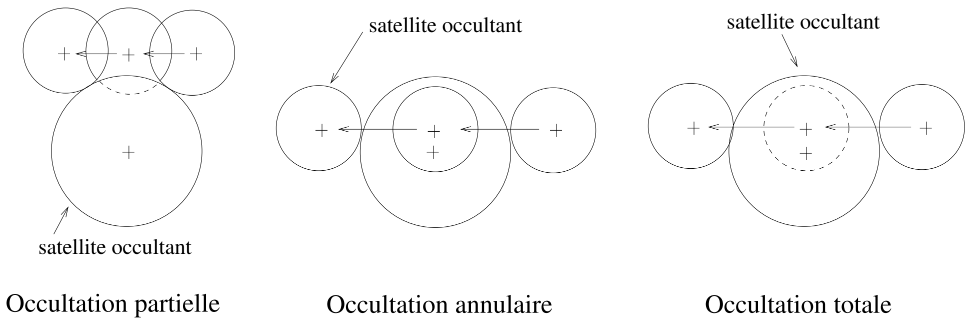

Fig. 8.4.7. Différentes circonstances géométriques lors des occultations mutuelles.

8.4.4.4. Calcul des prédictions de phénomènes mutuels

Afin de prédire des phénomènes mutuels, on détermine tout d'abord les rapprochements apparents, géocentriques et héliocentriques, entre les satellites. C'est lorsque la distance apparente minimale ainsi déterminée descend en-dessous d'une valeur de référence qu'il y a phénomène et que ses circonstances exactes peuvent être calculées. Tout au long des calculs, il est nécessaire d'utiliser une représentation du mouvement des satellites ayant le maximum de précision. Un écart en position de quelques millièmes de seconde de degré peut faire disparaître un phénomène. Les positions relatives des satellites à l'instant où le phénomène est à son maximum sont calculées par dichotomie et interpolation, on en déduit le minimum de distance apparente ou *paramètre d'impact*. Tous les corps sont modélisés par des sphères, et le Soleil est considéré à distance finie. La datation des différentes phases du phénomène ainsi que son amplitude sont alors déterminées. En toute rigueur

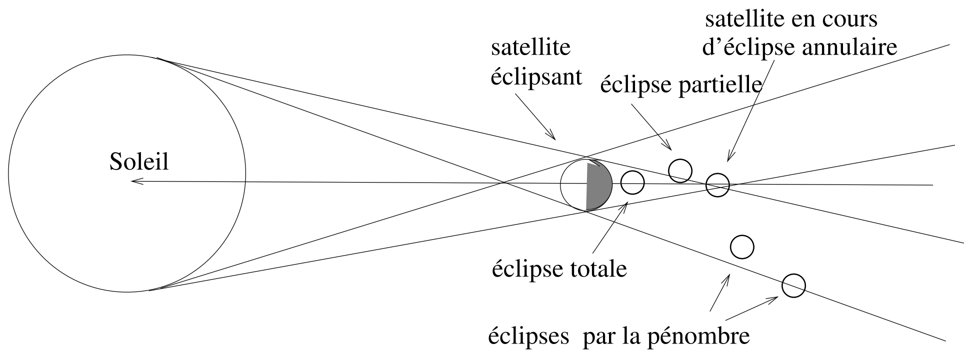

Fig. 8.4.8. Différentes circonstances géométriques lors des éclipses mutuelles.

cette amplitude, ou baisse maximale de luminosité du satellite en cours de phénomène, doit être calculée en tenant compte de la phase, de la pénombre et de l'effet centre-bord du Soleil, mais dans le cadre d'un calcul de prédictions on considère généralement les surfaces des satellites uniformes (Morando, 1987). Un soin particulier est apporté à la prise en compte de la vitesse finie de la lumière et à la correction du temps de lumière.

8.4.4.5. Le temps de lumière et la géométrie des phénomènes mutuels

La figure 8.4.9 montre la géométrie du système des corps concernés par un phénomène mutuel. L'origine des coordonnées S étant fixe, on peut calculer les vecteurs positions $\mathbf{ST}$, $\mathbf{Ss_1}$, $\mathbf{Ss_2}$ des objets T, s_1 et s_2 à tout instant. L'observateur ne voit pas, à l'instant t, les objets s_i (i valant 1 ou 2) aux positions définies par les vecteurs positions :

$$\mathbf{Ts_i} = \mathbf{Ss_i}(t) - \mathbf{ST}(t)$$

mais par :

$$\mathbf{Ts_i} = \mathbf{Ss_i}(t - \tau_i) - \mathbf{ST}(t),$$

où

$$\tau_i = \frac{\mathrm{Ts_i}}{c},$$

c étant la vitesse de la lumière. Pour connaître la valeur de τ_i, ce calcul nécessite donc une itération qui, si elle n'est pas faite, peut conduire à une erreur de l'ordre de la seconde de temps. Le vecteur $\mathbf{Ts_i}$ correspond à la position astrométrique géocentrique indépendamment du repère.

Remarquons que le vecteur $\mathbf{Ss_i}$ ne se calcule pas directement mais se déduit d'une combinaison vectorielle imposée par le mouvement de s_i autour de J, on a :

$$\mathbf{Ss_i}(t-\tau_i) = \mathbf{SJ}(t-\tau_i) + \mathbf{Js_i}(t-\tau_i).$$

Dans ce cas, **SJ** est calculé à l'instant $t-\tau_i$ et non à l'instant t car J est l'origine du mouvement de s_i.

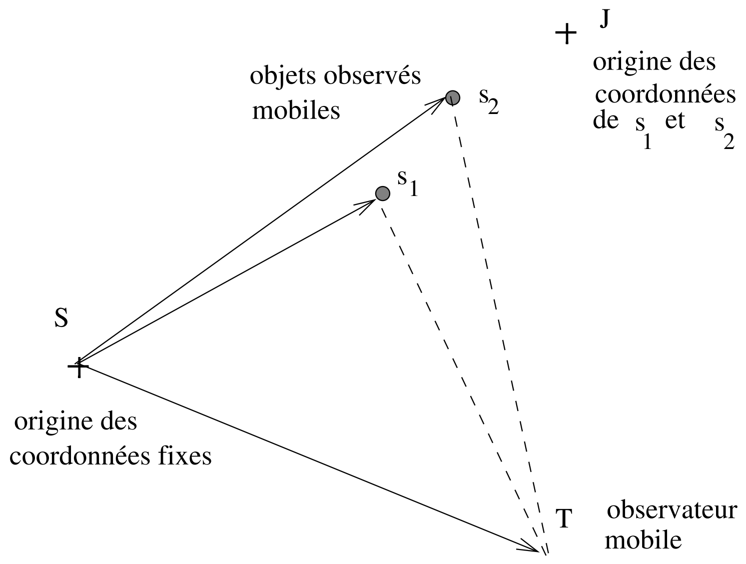

Fig. 8.4.9. Circonstances géométriques pendant un phénomène mutuel.

8.4.4.6. Calcul d'une occultation

Il y a occultation entre deux satellites lorsque la distance apparente qui les sépare descend en-dessous d'une certaine valeur. Cet angle se déduit des vecteurs $\mathbf{Ts_1}$ et $\mathbf{Ts_2}$ calculés grâce au formulaire précédent. Sur la figure 8.4.9, S est le Soleil, T la Terre, s_1 et s_2 sont les satellites en cours d'occultation mutuelle. Il y a occultation lorsque l'angle $(\mathbf{Ts_1}, \mathbf{Ts_2})$ descend en-dessous d'une certaine valeur (la somme des rayons apparents des satellites concernés).

8.4.4.7. Calcul d'une éclipse

Dans le cas d'une éclipse mutuelle, un satellite passe dans l'ombre d'un autre satellite, et ce phénomène ne dépend pas de la position de l'observateur. Cependant la vitesse finie de la lumière intervient ici aussi et il suffit d'appliquer le formulaire précédent pour établir le formulaire utile au calcul des éclipses mutuelles. Nous considérons alors qu'une éclipse mutuelle est une occultation du Soleil par le satellite éclipsant, vue depuis le satellite éclipsé. Sur la figure 8.4.9, S est le Soleil, l'observateur virtuel est au point s_2, l'objet occultant est s_1 et l'objet occulté est S . Il y a donc éclipse lorsque l'angle $(\mathbf{s_2S}, \mathbf{s_2s_1})$ descend en-dessous d'une certaine valeur, dépendant des distances et des diamètres des objets. Le calcul des vecteurs $\mathbf{s_2S}$ et $\mathbf{s_2s_1}$ est fait suivant le principe du formulaire précédent. Le vecteur $\mathbf{s_2S}$ est tout d'abord calculé à l'instant t de l'observateur virtuel, c'est-à-dire l'instant de l'occultation du Soleil vue de s_2. Puis on a :

$$\mathbf{s_2s_1} = \mathbf{Ss_1}(t-\tau) - \mathbf{Ss_2}(t),$$

où

$$\tau = \frac{\mathrm{s_2s_1}}{c};$$

la date de l'événement observé depuis la Terre est la date t à laquelle on ajoute le retard dû à la transmission de l'information depuis s_2 jusqu'à la Terre, soit :

$$t' = t + \frac{\mathrm{s_2T}}{c}.$$

Le calcul des circonstances d'une éclipse mutuelle prend en compte l'existence de la pénombre, elles dépendent de la distance du satellite éclipsé à l'axe du cône d'ombre (Fig. 8.4.8).

8.4.4.8. Observation des phénomènes mutuels et réduction

L'observation des phénomènes mutuels permet d'obtenir une précision sur la position des satellites galiléens bien meilleure que par les autres types d'observation. En effet, il s'agit de mesurer l'instant où le phénomène est à son maximum. Or pour une vitesse relative des satellites de 10 km/s et une précision temporelle de 10 secondes, la précision en longitude orbitale de l'observation pourra atteindre 100 km, ce qui représente $0''.03$ géocentrique à l'opposition moyenne de Jupiter. Ces observations sont réalisées dans le cadre de campagnes internationales (Arlot et al., 1992).

Il faut noter que l'instant du maximum du phénomène observé correspond à celui du maximum de chute de flux lumineux. Cet instant ne correspond pas exactement au minimum de distance apparente entre les satellites tel qu'il est calculé dans les prédictions. Les effets combinés de la phase, des propriétés de surface des satellites et des variations locales d'albédo peuvent en effet engendrer des écarts entre ces deux instants. Une modélisation photométrique (Thuillot et Descamps, 1990 ; Descamps et al., 1992 ; Descamps, 1992, 1994,) peut permettre de prendre en compte ces effets dans la réduction des observations et d'en améliorer la précision astrométrique.

8.5. LES SATELLITES FAIBLES DE JUPITER

8.5.1. Introduction

Outre les quatre satellites galiléens, douze autres satellites ont été observés autour de Jupiter. Ces satellites ont des magnitudes beaucoup plus faibles (de 14 à 19) ce qui explique qu'ils ont été découverts beaucoup plus tard. L'usage des chiffres romains dans leur dénomination est recommandé par le SNLC (Satellite Nomenclature Liaison Committee de la commission 20 de l'UAI). Ces chiffres ont été attribués dans l'ordre de découverte des satellites. On peut classer ces satellites en deux groupes. Le premier groupe contient les quatre satellites les plus proches de la planète. Le second groupe évolue au-delà des satellites galiléens le long d'orbites parcourues dans le sens direct ou rétrograde ; dans ce dernier cas, la terminaison des noms des satellites est un «é» (Ananké, Carmé, Pasiphaé, Sinopé), la terminaison «a» étant attribuée aux satellites ayant des orbites directes (Léda, Himalia, Lysithéa, Elara).

8.5.2. Satellites proches de Jupiter (JV, JXIV, JXV, JXVI)

Gravitant entre les anneaux de la planète et les satellites galiléens, les satellites proches de Jupiter ont été très longtemps ignorés. Le plus gros d'entre eux, Amalthée (JV), découvert en 1892 par E. Barnard se présente comme un ellipsoïde dont le plus grand des axes mesure 262 km et le plus petit 134 km. Il tourne autour de Jupiter en 11 h 57 min, dans un plan très faiblement incliné sur l'équateur de la planète ($0°.4$) en décrivant une orbite de très faible excentricité (0.003). Les trois autres satellites ont été découverts à la suite des survols de la planète par les sondes Voyager 1 et Voyager 2, par l'analyse des images enregistrées lors de ces survols. Leurs diamètres sont de quelques dizaines de kilomètres. Métis (JXVI) et Adrastéia (JXV) décrivent des orbites très proches du bord extérieur de l'anneau principal de Jupiter et pourraient être responsables du confinement de cet anneau ; Thébé (JXIV) se situe entre Amalthée et Io. Ces trois satellites ont des orbites quasi circulaires, dans le plan équatorial de Jupiter et leurs périodes de révolution autour de la planète sont de 7 h 4 min pour Métis, 7 h 9 min pour Adrastéia et 16 h 11 min pour Thébé. Remarquons que la période de rotation de Jupiter sur lui-même étant légèrement inférieure à 10 h, les satellites Métis et Adrastéia tournent autour de la planète plus rapidement que celle-ci sur elle-même : un observateur sur Jupiter verrait ces satellites se lever à l'Ouest et se coucher à l'Est.

8.5.3. Satellites lointains

8.5.3.1. Satellites directs (JVI, JVII, JX, JXIII)

Au-delà des satellites galiléens se trouve un premier groupe de quatre satellites : Léda (JXIII), Himalia (JVI), Lysithéa (JX) et Elara (JVII) . Ces satellites ont des magnitudes faibles, allant de la magnitude 15 pour Himalia découvert en 1905 par Perrine sur des clichés de 1904, à la magnitude

20 pour Léda découvert en 1974 par Kowal. Leurs diamètres se situent entre 10 km pour le plus petit (Léda) et 170 km pour le plus gros (Himalia).

8.5.3.2. Satellites rétrogrades (JVIII, JIX, JXI, JXII)

Les quatre satellites les plus éloignés de Jupiter, Ananké, (JXII), Carmé (JXI), Pasiphaé (JVIII), Sinopé (JIX) sont peut-être des astéroïdes capturés par l'attraction de la planète et ont des caractéristiques voisines. Ils sont très petits, leurs diamètres étant compris entre 20 et 40 kilomètres et ils ont des magnitudes visuelles très faibles (entre 17 et 19).

8.5.4. Positions des satellites lointains

Actuellement, les éphémérides les plus précises des huit satellites lointains de Jupiter sont issues d'intégrations numériques de leur mouvement. Les résultats donnés dans ce paragraphe proviennent d'intégrations numériques effectuées par Rocher (1996) et sont publiés dans le *Supplément à la Connaissance des Temps pour les satellites faibles de Jupiter et Saturne* (Bureau des longitudes, 1997).

Ces huit satellites ont des orbites très perturbées, leurs éléments elliptiques sont loin d'être constants comme le montre la table 8.5.1. Cette table donne, pour les huit satellites lointains de Jupiter, les extremums, sur l'intervalle de temps [1900, 2050], du demi-grand axe a, de l'excentricité e, de l'inclinaison sur l'équateur céleste J2000 i et de la période de révolution sidérale P.

Table 8.5.1. Extremums des éléments écliptiques des satellites lointains de Jupiter sur l'intervalle de temps [1900, 2050].

	a (10^3 km)	e	i (degrés)	P (jours)
JVI	11 355/11 532	0.112/0.207	4.5/ 51.9	247.2/253.0
JVII	11 613/11 820	0.155/0.272	1.4/ 46.7	255.7/262.5
JVIII	22 388/24 928	0.184/0.668	119.1/174.2	684.4/804.1
JIX	22 567/25 130	0.108/0.425	132.3/179.4	692.6/813.8
JX	11 611/11 790	0.081/0.155	23.2/ 51.4	255.6/261.5
JXI	22 111/24 448	0.132/0.414	140.6/172.4	671.7/780.9
JXII	20 320/21 776	0.083/0.452	122.2/172.9	591.8/656.5
JXIII	11 073/11 228	0.116/0.210	1.5/ 50.6	238.0/243.1

La table 8.5.2 donne l'ensemble des coordonnées cartésiennes qui décrivent les vecteurs positions et vitesses des huit satellites JVI, JVII, JVIII, JIX, JX, JXI, JXII et JXIII pour l'époque J2000. Ces coordonnées sont rapportées au repère équatorial jovicentrique défini par l'équateur céleste et l'équinoxe moyens J2000.

Table 8.5.2. Coordonnées cartésiennes planétocentriques équatoriales pour l'époque J2000 (DJ 2 451 545.0), rapportées à l'équinoxe et à l'équateur moyens J2000, pour les satellites lointains de Jupiter, issues du *Supplément à la Connaissance des Temps pour les satellites faibles de Jupiter et Saturne* (Bureau des longitudes, 1997).

Satellite		Vecteur position (ua)	Vecteur vitesse (ua/jour)
JVI	Himalia	$x = -0.032\,925\,033\,986\,486$	$\dot{x} = -0.001\,627\,620\,940\,097$
		$y = +0.041\,918\,247\,516\,645$	$\dot{y} = -0.001\,024\,635\,782\,776$
		$z = +0.053\,500\,883\,204\,527$	$\dot{z} = +0.000\,256\,115\,222\,421$
JVII	Elara	$x = -0.039\,309\,003\,916\,701$	$\dot{x} = +0.001\,577\,732\,471\,970$
		$y = -0.046\,486\,851\,593\,285$	$\dot{y} = -0.001\,376\,307\,192\,019$
		$z = +0.010\,616\,407\,097\,137$	$\dot{z} = -0.001\,076\,635\,407\,108$
JVIII	Pasiphaé	$x = +0.009\,037\,851\,043\,246$	$\dot{x} = -0.001\,052\,432\,045\,155$
		$y = -0.167\,838\,571\,804\,011$	$\dot{y} = +0.000\,457\,610\,874\,463$
		$z = +0.017\,481\,903\,146\,517$	$\dot{z} = +0.000\,471\,442\,448\,105$
JIX	Sinopé	$x = -0.160\,427\,537\,421\,333$	$\dot{x} = +0.000\,385\,975\,925\,717$
		$y = +0.094\,594\,411\,251\,450$	$\dot{y} = +0.000\,912\,295\,376\,322$
		$z = +0.072\,757\,323\,447\,753$	$\dot{z} = -0.000\,067\,270\,712\,009$
JX	Lysithéa	$x = +0.067\,123\,092\,011\,523$	$\dot{x} = -0.000\,723\,307\,788\,244$
		$y = +0.015\,561\,490\,938\,446$	$\dot{y} = +0.001\,211\,506\,252\,140$
		$z = +0.011\,164\,497\,886\,402$	$\dot{z} = +0.001\,582\,206\,982\,979$
JXI	Carmé	$x = -0.097\,758\,901\,746\,496$	$\dot{x} = -0.000\,787\,351\,220\,143$
		$y = -0.114\,193\,890\,307\,080$	$\dot{y} = +0.000\,862\,294\,845\,319$
		$z = -0.093\,998\,409\,450\,810$	$\dot{z} = +0.000\,277\,843\,500\,040$
JXII	Ananké	$x = +0.075\,574\,336\,531\,451$	$\dot{x} = +0.000\,802\,339\,805\,234$
		$y = +0.144\,088\,037\,711\,652$	$\dot{y} = -0.000\,924\,092\,856\,450$
		$z = -0.002\,070\,787\,702\,912$	$\dot{z} = +0.000\,159\,214\,889\,172$
JXIII	Léda	$x = +0.076\,970\,844\,954\,700$	$\dot{x} = +0.000\,261\,630\,902\,332$
		$y = -0.023\,617\,968\,254\,203$	$\dot{y} = +0.001\,702\,473\,321\,022$
		$z = +0.021\,959\,109\,998\,085$	$\dot{z} = +0.000\,098\,419\,550\,119$

Les tables 8.5.3 et 8.5.4 donnent les caractéristiques des ajustements des orbites de ces satellites.

Table 8.5.3. Caractéristiques des ajustements des orbites de JVI, JVII, JVIII et JIX.

Données	JVI	JVII	JVIII	JIX
Nombre d'observations	518	225	335	116
Période d'observations	1884-1993	1905-1993	1908-1993	1914-1993
Moyenne des $\Delta\alpha\cos\delta^*$	$0''.49$	$0''.35$	$0''.31$	$0''.06$
Moyenne des $\Delta\delta^*$	$0''.49$	$0''.08$	$0''.27$	$0''.21$
Écart type en $\Delta\alpha\cos\delta$	$1''.22$	$0''.91$	$0''.76$	$0''.65$
Écart type en $\Delta\delta$	$1''.12$	$0''.84$	$0''.84$	$0''.64$

$*$ $\Delta\alpha = \alpha_{\text{observé}} - \alpha_{\text{calculé}}$ et $\Delta\delta = \delta_{\text{observé}} - \delta_{\text{calculé}}$

Table 8.5.4. Caractéristiques des ajustements des orbites de JX, JXI, JXII et JXIII.

Données	JX	JXI	JXII	JXIII
Nombre d'observations	82	87	37	33
Période d'observations	1938-1993	1938-1993	1954-1993	1974-1993
Moyenne des $\Delta\alpha\cos\delta^*$	$0''.07$	$0''.06$	$0''.06$	$0''.10$
Moyenne des $\Delta\delta^*$	$0''.09$	$0''.19$	$0''.07$	$0''.14$
Écart type en $\Delta\alpha\cos\delta$	$0''.57$	$0''.73$	$0''.52$	$0''.67$
Écart type en $\Delta\delta$	$0''.53$	$0''.70$	$0''.47$	$0''.60$

$*$ $\Delta\alpha = \alpha_{\text{observé}} - \alpha_{\text{calculé}}$ et $\Delta\delta = \delta_{\text{observé}} - \delta_{\text{calculé}}$

Les éphémérides de ces satellites de Jupiter ont été représentées sous la forme de développements en fonctions mixtes (*cf.* 9.1.4) (Rocher et Chapront, 1996) à l'aide d'une méthode d'analyse de fréquences (Chapront, 1995). Ces séries permettent de calculer les positions des satellites sur une période de 150 ans (1900-2050) avec une précision de l'ordre du centième de seconde de degré. Ces séries, accompagnées de programmes de calcul, se trouvent sur le serveur ftp du Bureau des longitudes.

8.6. LES SATELLITES DE SATURNE

8.6.1. Historique

8.6.1.1. La liste des satellites de Saturne

Saturne compte dix-huit satellites bien identifiés et répertoriés, dont la liste est donnée dans la table 8.6.1. Les huit premiers sont facilement observables et ont été découverts à partir du milieu du dix-septième siècle. Titan, le plus gros, de magnitude 8.3, fut observé par Huygens dès 1655. En outre, dans le texte écrit l'année suivante au sujet de sa découverte de Titan, Huygens annonce l'existence d'un anneau autour de Saturne au moyen d'un anagramme rédigé en latin. Huygens pensait qu'avec la découverte de Titan s'achevait la recherche de nouveaux satellites dans le système solaire ; il pensait en effet que le nombre total de satellites ne saurait excéder celui des planètes. Les découvertes de Téthys, Dioné, Rhéa, Japet par Cassini le feront renoncer à cette hypothèse. Peu après avoir découvert Phœbé en 1898, Pickering (1905) prit une série de clichés photographiques du ciel pour confirmer l'orbite rétrograde de ce nouveau satellite et pour en chercher d'autres, plus faibles. L'analyse de plusieurs plaques le conduisit à suspecter l'existence d'un dixième satellite, Thémis, mais cet objet ne fut plus jamais retrouvé et des travaux plus récents (Aksnes et Franklin, 1978) montrent que l'on peut considérer avec une quasi-certitude que ce satellite n'existe pas.

À partir de 1898, date de la découverte de Phœbé, et pendant plus d'un demi-siècle, aucun nouveau satellite ne sera découvert. En 1966, Dollfus découvrit un nouveau satellite, Janus, en profitant de la configuration particulière des anneaux de Saturne qui, tous les quinze ans, sont vus depuis la Terre par la tranche ; la diffusion de la lumière par les anneaux est alors réduite, et cette circonstance facilite l'observation des objets faibles et proches de la planète centrale (Dollfus, 1967, 1968). Cependant la période obtenue par Dollfus était beaucoup plus longue que la période réelle du satellite (0.6945 jour). Fountain et Larson (1978) confirmèrent l'existence de ce satellite et montrèrent la présence probable d'un nouveau satellite sur une orbite voisine de celle de Janus ; les sondes Voyager qui survolèrent le système de Saturne en novembre 1980 et avril 1981 confirmèrent l'existence de ce satellite, Épiméthée, sur une orbite extrêmement proche de celle de Janus.

En 1979 - 1980, les anneaux étaient de nouveau vus par la tranche, et trois autres satellites faibles, Hélène, Télesto et Calypso furent découverts par des observations faites au sol. Hélène fut observé pour la première fois au Pic du Midi, avec une caméra électronique placée derrière le télescope de 1 mètre (Lecacheux et al., 1980). Télesto et Calypso furent observés par plusieurs équipes américaines et françaises avant d'être clairement identifiés (Seidelmann et al., 1981 ; Larson et al., 1981 ; Veillet, 1981).

Les satellites Atlas, Prométhée et Pandore, les plus proches de Saturne et les plus faibles ont été découverts à l'occasion du survol du système de Saturne par les sondes Voyager en 1980 et 1981.

Le dernier satellite de Saturne identifié, Pan, a été découvert en 1991 par Showalter. Cette découverte est décrite dans Showalter (1991). L'analyse des images du système de Saturne envoyées par les sondes Voyager avait révélé dès 1985 une structure festonnée des bords de la division d'Encke dans le système des anneaux de la planète ; une équipe de chercheurs américains avait montré que cette structure pouvait s'expliquer par la présence d'un petit satellite situé à l'intérieur de la

Table 8.6.1. Liste des satellites de Saturne, avec la date et l'auteur de la découverte.

I	Mimas	1789	W. Herschel
II	Encelade	1789	W. Herschel
III	Téthys	1684	J.D. Cassini
IV	Dioné	1684	J.D. Cassini
V	Rhéa	1672	J.D. Cassini
VI	Titan	1655	C. Huygens
VII	Hypérion	1848	Bond - Lassel
VIII	Japet	1671	J.D. Cassini
IX	Phœbé	1898	W. Pickering
X	Janus	1966	A. Dollfus
XI	Épiméthée	1978	J.W. Fountain - S.M. Larson
XII	Hélène	1980	P. Laques - J. Lecacheux
XIII	Télesto	1980	équipes américaines
XIV	Calypso	1980	équipes américaines
XV	Atlas	1980	sondes Voyager
XVI	Prométhée	1980	sondes Voyager
XVII	Pandore	1980	sondes Voyager
XVIII	Pan	1991	Showalter

division (Cuzzi et Scargle, 1985). Une orbite fut prédite à partir d'un modèle décrivant les effets d'un petit satellite sur les particules de l'anneau et on analysa le catalogue des 30 000 images de Voyager par une procédure automatique. On découvrit le nouveau satellite sur vingt-trois d'entre elles. Les observations de Pan s'étendent sur une période de huit jours et correspondent à quinze révolutions du satellite.

8.6.1.2. Les théories des neuf premiers satellites

Les neuf premiers satellites furent l'objet d'observations extrêmement nombreuses autour des années 1900 et les caractéristiques essentielles de la dynamique de ces satellites furent très rapidement dégagées ; G. Struve (1930) détermine les orbites des six premiers satellites et de Japet ; Woltjer (1928) développe la théorie d'Hypérion ; Ross (1905) développe une théorie de Phœbé. On dispose ainsi, vers 1935, d'un ensemble de théories suffisantes, compte tenu de la précision des mesures faites à cette époque, de l'ordre de $0''.25$.

Par la suite, et jusqu'en 1955, peu d'observations furent faites, et les théories des satellites restèrent inchangées. Après 1955 un ensemble de travaux fut réalisé dont une caractéristique commune est de prendre comme point de départ les travaux de G. Struve et Woltjer cités plus haut, et d'y ajouter quelques termes jusqu'alors négligés. Par ailleurs ces travaux exploitent les données provenant des nombreuses observations faites depuis 1960. Ainsi, par exemple, les théories des huit premiers satellites sont développées par Kozaï (1957, 1976), Sinclair (1977), Rapaport (1977), Taylor et Shen (1988), Dourneau (1987, 1993), Harper et Taylor (1993). La théorie de Phœbé est développée par Bec-Borsenberger et Rocher (1982), Bykova et Shikhalev (1984).

Les éphémérides issues de l'ensemble des théories des différents auteurs représentent le mouvement des huit premiers satellites avec une précision moins bonne que les éphémérides des satellites d'autres planètes. La précision sur les positions est de l'ordre de 1400 km, soit $0''.20$ géocentrique, pour les satellites de Saturne alors qu'elle atteint 200 km pour les satellites galiléens de Jupiter et 100 km pour les satellites d'Uranus. Or les observations terrestres peuvent atteindre aujourd'hui une précision de $0''.05$ géocentrique ; de plus l'exploration spatiale du système de Saturne (la mission Cassini) est prévue pour l'an 2000 ; une sonde orbitant autour de la planète observera les satellites avec une précision de quelques kilomètres ; cette perspective nécessite donc de progresser dans la théorie des mouvements des satellites. Une autre caractéristique de ces travaux est de traiter les satellites indépendamment ou par couples, essentiellement pour séparer les problèmes posés par les résonances affectant plusieurs couples (Mimas-Téthys, Encelade-Dioné). Cette séparation a entraîné l'usage de repères différents pour les divers satellites, de systèmes de constantes pas toujours cohérents, et elle rend difficile une amélioration significative des résidus.

Il était donc devenu nécessaire de reconsidérer la théorie des premiers satellites de Saturne, en traitant le problème globalement, et non plus couple par couple, et en prenant en compte des perturbations jusqu'alors négligées. Ce travail a été réalisé récemment par Vienne (1991), Duriez et Vienne (1991), Vienne et Duriez (1991, 1992). Ce travail présente une théorie analytique des huit premiers satellites (sauf Hypérion), dans un système de référence unique, contenant un seul jeu de variables et de paramètres. La méthode utilisée est une extension de la théorie générale planétaire développée par Duriez (1979) et Laskar (1985). Les conditions initiales de chaque satellite ainsi que les paramètres physiques du système de Saturne (masses des satellites, coefficients J2, J4, J6, associés à l'aplatissement de Saturne) ont été ensuite déterminés à partir de l'ensemble des observations disponibles des satellites. À l'issue de cet ajustement, on dispose de nouvelles éphémérides publiées dans Vienne et Duriez (1995) pour les huit premiers satellites, Hypérion ayant été inclus dans la liste.

8.6.2. Les caractéristiques dynamiques principales des neuf premiers satellites

8.6.2.1. Généralités

Nous présentons dans la table 8.6.2 quelques paramètres dynamiques et physiques des neuf premiers satellites de Saturne. m désigne la masse du satellite ; a, I et e désignent, respectivement, le demi-grand axe, l'inclinaison et l'excentricité de l'orbite ; P est la période orbitale, m_v la magnitude visuelle et E_m l'élongation maximale ; on donne soit le rayon a_s de la sphère, soit les demi-axes a_1, a_2, a_3 de l'ellipsoïde représentant au mieux la surface du satellite. Les inclinaisons sont mesurées par rapport à l'équateur de Saturne, sauf dans le cas de Japet et Phœbé pour lesquels elles sont

Table 8.6.2. Principales caractéristiques des neuf premiers satellites de Saturne.

		m (masse de Saturne)	$a_1 \times a_2 \times a_3$ ou a_s (km)	a (10^3 km)	I (degré)	e	P (jours)	m_v	E_m (′)(″)
I	Mimas	8.0×10^{-8}	$210.3 \times 197.4 \times 192.6$	185.54	1.56	0.01905	0.942	12.9	30
II	Encelade	1.3×10^{-7}	$256.2 \times 247.3 \times 244.0$	238.20	0.03	0.0049	1.370	11.5	38
III	Téthys	1.2×10^{-6}	$535.6 \times 528.2 \times 525.8$	294.992	1.10	0.0000	1.887	10.3	48
IV	Dioné	1.85×10^{-6}	560	377.654	0.01	0.0022	2.736	10.4	1 01
V	Rhéa	4.06×10^{-6}	764	527.367	0.35	0.0003	4.517	9.7	1 25
VI	Titan	2.367×10^{-4}	2 575	1 221.803	0.30	0.0291	15.945	8.3	3 17
VII	Hypérion	3×10^{-8}	$180\times140\times112.5$	1 481.1	0.64	0.1035	21.276	14.2	3 59
VIII	Japet	2.79×10^{-6}	718	3 561.85	$18.5^{(1)}$	0.0283	79.330	11.9	9 34
IX	Phœbé$^{(2)}$	7×10^{-10}	$115 \times 110 \times 105$	12 893.24	$173.73^{(1)}$	0.17563	546.6	16.5	34 51

(1) Inclinaison sur l'écliptique

(2) Éléments osculateurs pour l'époque 14 janvier 1970 à 0 h

mesurées par rapport à l'écliptique. Phœbé a une orbite rétrograde. Les périodes sont des périodes tropiques, et les magnitudes sont les magnitudes moyennes à l'opposition. Ces satellites sont en rotation synchrone, sauf Phœbé dont la période de rotation propre est de 9 h, et Hypérion qui a un mouvement de rotation chaotique (Wisdom et al., 1984 ; Klavetter, 1989a, 1989b).

On trouvera un ensemble plus complet de données sur ces satellites au paragraphe 2.4.

8.6.2.2. Le plan des anneaux

Le plan des anneaux de Saturne est supposé coïncider avec le plan équatorial de la planète. Grâce à l'analyse de la trajectoire des sondes Voyager d'une part, à l'observation d'occultations d'étoiles par les anneaux dans les domaines radio et ultraviolet d'autre part, la connaissance de l'orientation du plan des anneaux dans l'espace a pu être améliorée durant la dernière décennie.

Dans le système défini par l'équateur moyen et l'équinoxe de B1950.0 (DJ 2 433 282.423), les coordonnées du pôle nord de Saturne pour l'époque 1981.25 sont d'après Simpson et al. (1983) :

$$\alpha_0 = 38^\circ.409 \pm 0^\circ.016$$
$$\delta_0 = 83^\circ.324 \pm 0^\circ.002.$$

Dans le système défini par l'équateur moyen et l'équinoxe de J2000 (DJ 2 451 545.0), les coordonnées du pôle nord de Saturne s'écrivent :

$$\alpha = 40^\circ.580 \pm 0^\circ.016 - 0^\circ.036\,T$$
$$\delta = 83^\circ.538 \pm 0^\circ.002 - 0^\circ.004\,T$$

où T est exprimé en siècles juliens de 36 525 jours à partir de J2000.

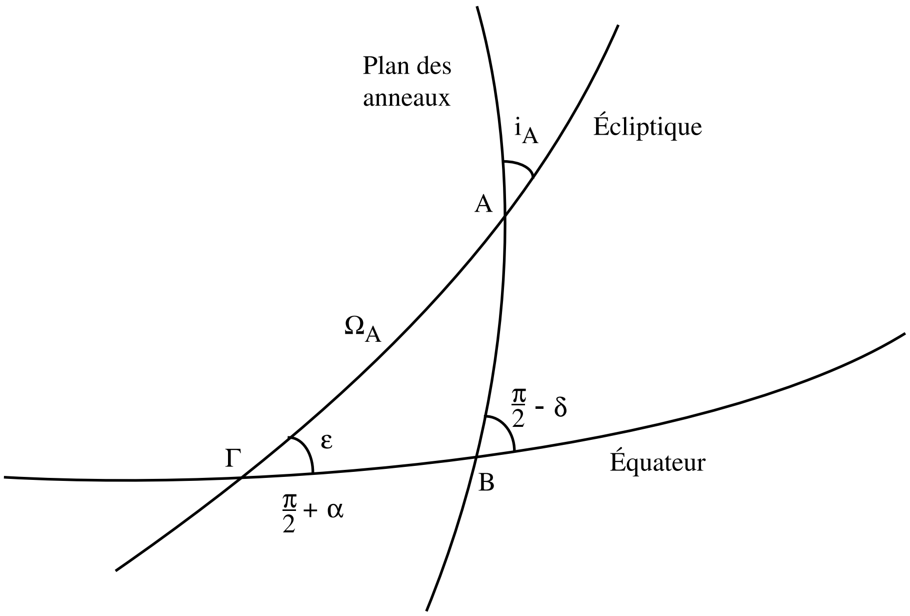

Fig. 8.6.1. Position du plan des anneaux.

Adoptant l'écliptique comme plan de référence, on définit i_A et Ω_A l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant du plan des anneaux (Fig. 8.6.1). i_A et Ω_A sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\cos i_A &= \cos\varepsilon \sin\delta - \cos\delta \sin\alpha \sin\varepsilon \\
\sin i_A \cos\Omega_A &= -\cos\delta \sin\alpha \cos\varepsilon - \sin\delta \sin\varepsilon \\
\sin i_A \sin\Omega_A &= \cos\delta \cos\alpha
\end{aligned}$$

où ε est l'obliquité de l'écliptique.

Les valeurs de i_A et Ω_A dans le système J2000 sont les suivantes,

$$\begin{aligned}
1950: \quad i_A &= 28^\circ.0490, \quad \Omega_A = 169^\circ.5360, \\
1960: \quad i_A &= 28^\circ.0490, \quad \Omega_A = 169^\circ.5348, \\
1970: \quad i_A &= 28^\circ.0491, \quad \Omega_A = 169^\circ.5336, \\
1980: \quad i_A &= 28^\circ.0491, \quad \Omega_A = 169^\circ.5324, \\
1990: \quad i_A &= 28^\circ.0492, \quad \Omega_A = 169^\circ.5312, \\
2000: \quad i_A &= 28^\circ.0492, \quad \Omega_A = 169^\circ.5300, \\
2010: \quad i_A &= 28^\circ.0493, \quad \Omega_A = 169^\circ.5288.
\end{aligned}$$

Dans le système B1950.0 les valeurs de i_A et Ω_A déterminées par Dourneau (1987) et Harper et Taylor (1993) sont :

$$\begin{aligned}
i_A &= 28^\circ.0817, & i_A &= 28^\circ.0653, \\
\Omega_A &= 168^\circ.8112 \quad \text{(selon Dourneau)}\,; & \Omega_A &= 168^\circ.8387 \quad \text{(selon Harper et Taylor)}.
\end{aligned}$$

8.6.2.3. Notations

D'une manière générale un élément de l'orbite x_{i} se rapportera au satellite i $(1 \leq \mathrm{i} \leq 8)$, les satellites étant ordonnés de 1 à 8 par distance croissante à Saturne, dans l'ordre : Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan, Hypérion et Japet.

La figure 8.6.2 représente le système de référence utilisé pour les quatre premiers satellites, la figure 8.6.3 représente le système adopté pour les quatre satellites extérieurs. Sur ces deux figures C représente le périastre de l'orbite.

Notations communes aux huit premiers satellites

Nous notons (Fig. 8.6.2) :

i_a, l'inclinaison du plan des anneaux sur l'écliptique ;
$\Omega_a = \Gamma\mathrm{A}$, la longitude du nœud du plan des anneaux sur l'écliptique ;
a, le demi-grand axe de l'orbite du satellite ;
e, l'excentricité de l'orbite ;
γ, l'inclinaison de l'orbite sur le plan des anneaux.
Pour l'ensemble des satellites, à l'exception d'Hypérion, nous utilisons comme époque initiale :

$$t_0 = 1930 \text{ janvier } 24.0 \ (\mathrm{DJ}\ 2\,426\,000.5). \tag{8.6.1}$$

Considérons une date julienne DJ, nous notons :

$$d = \mathrm{DJ} - 2\,426\,000.5\,; \quad t = d/365.25\,; \quad T = d/365\,25. \tag{8.6.2}$$

Enfin, nous notons $\chi = 180/\pi$, le facteur de conversion des radians en degrés.

Notations utilisées pour les quatre premiers satellites

Nous notons (Fig. 8.6.2) :

$N = \Gamma\mathrm{A} + \mathrm{AB}$, N définit la position du nœud de l'orbite sur le plan des anneaux ;
$P = N + \mathrm{BC}$, P définit la position du périastre C ;
$\lambda = P +$ anomalie moyenne, λ définit la longitude moyenne du satellite.

Notations utilisées pour les satellites extérieurs

Nous notons (Fig. 8.6.3) :

i, l'inclinaison de l'orbite du satellite sur l'écliptique ;
$N = \Gamma\mathrm{O}$, la longitude du nœud O de l'orbite sur l'écliptique ;
$\varpi = N + \mathrm{OC}$, la longitude du périastre ;
$\lambda = \varpi +$ anomalie moyenne, λ définit la longitude moyenne.

8.6.2.4. Sources

Les éléments orbitaux dont nous allons donner les expressions plus loin sont issus de :

Harper et Taylor (1993) pour Mimas, Téthys, Encelade, Dioné, Rhéa, Titan et Japet,
Dourneau (1987) pour Hypérion,
Bec-Borsenberger et Rocher (1982) pour Phœbé.

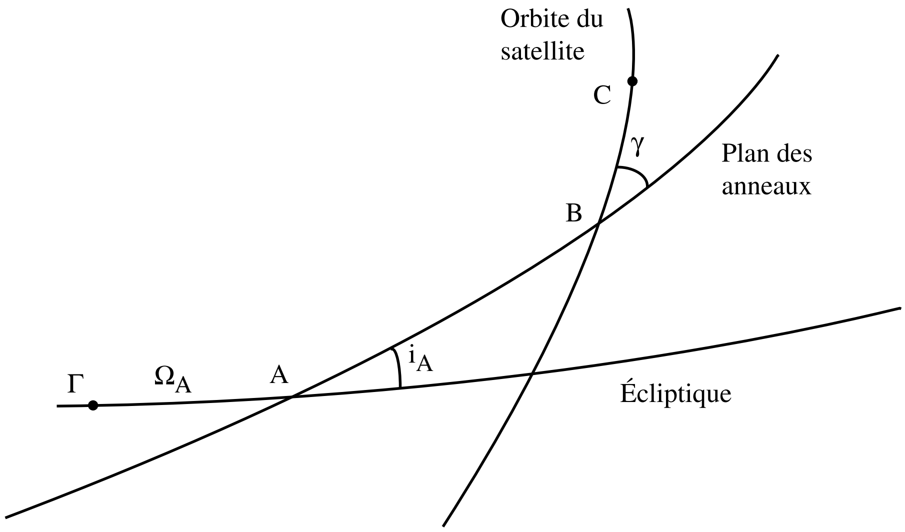

Fig. 8.6.2. Système de référence adopté pour les quatre premiers satellites.

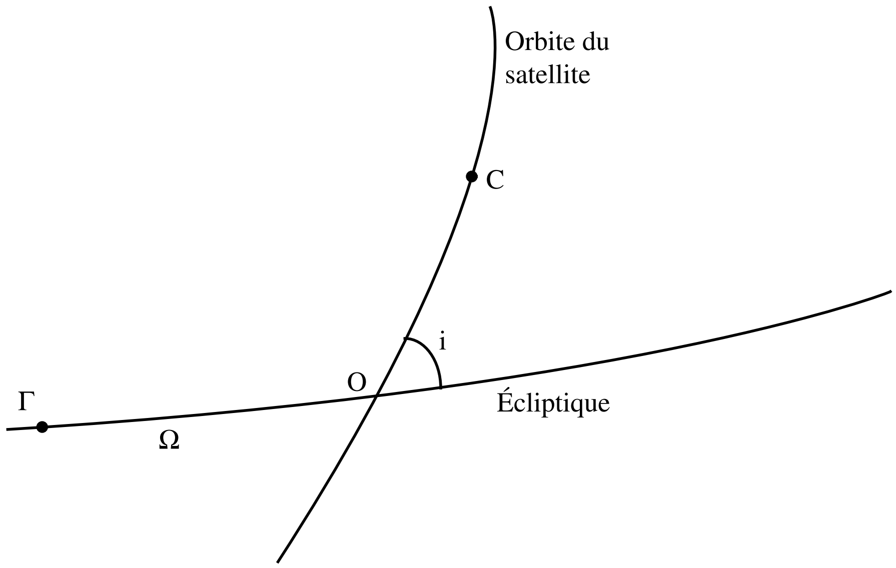

Fig. 8.6.3. Système de référence adopté pour les satellites extérieurs.

8.6.2.5. Les couples Mimas-Téthys et Encelade-Dioné

Les éléments orbitaux

La table 8.6.3 donne les éléments orbitaux initiaux a_0, e_0, γ_0, N_0, P_0 et λ_0 des quatre premiers satellites, correspondant à l'époque t_0 définie par (8.6.1). La table 8.6.4 donne les moyens mouvements n et les vitesses séculaires des nœuds et des périastres $\dot{N}$ et $\dot{P}$ de ces satellites. La table 8.6.5 donne les paramètres associés aux librations affectant les couples Mimas-Téthys et Encelade-Dioné.

Table 8.6.3. Éléments orbitaux initiaux de Mimas, Encelade, Téthys et Dioné pour l'époque t_0 (DJ = 2 426 000.5) issus de Harper et Taylor (1993).

Élément	Unité	Mimas	Encelade	Téthys	Dioné
a_0	UA	0.001 241 51	0.001 592 63	0.001 971 95	0.002 524 86
e_0		0.020 14	0.004 795	0.000 100	0.002 147
γ_0	degré	1.585	0.016	1.0895	0.0126
N_0	degré	272.85	310	42.75	38
P_0	degré	266.73	307.3348	56	353.0
λ_0	degré	230.489	76.1250	194.4419	191.7299

Table 8.6.4. Moyens mouvements n et vitesses séculaires des nœuds et des périastres $\dot{N}$ et $\dot{P}$ de Mimas, Encelade, Téthys et Dioné (Harper et Taylor, 1993).

Élément	Unité	Mimas	Encelade	Téthys	Dioné
n	degré/jour	381.994 5087	262.731 900 58	190.697 911 96	131.534 931 86
$\dot{N}$	degré/an	−365.063	−151.43	−72.2351	−30.30
$\dot{P}$	degré/an	365.532		70.03	30.887

Table 8.6.5. Paramètres associés aux librations affectant les couples Mimas-Téthys et Encelade-Dioné (Harper et Taylor, 1993).

Paramètre	Unité	Mimas-Téthys	Paramètre	Unité	Encelade-Dioné
A_1	degré/jour	−43.635	p_2	degré	0.297
x_{13}		0.095 39	p_4	degré	−0.0262
ψ_{13}	degré/an	5.0866	μ_{24}	degré	314.3
τ_0	an	1 866.261	ν_{24}	degré/an	32.567

Le couple Mimas-Téthys

La dynamique du couple est dominée par :

• une précession rapide des nœuds et périastres provoquée par l'action de l'aplatissement de Saturne sur des satellites proches ;

• une libration de grande amplitude et de longue période de l'argument $\theta = 2\lambda_1 - 4\lambda_3 + N_1 + N_3$ due à une commensurabilité approchée 2 : 1 des moyens mouvements. Cet argument oscille autour de 0 avec une période d'environ 72 ans et une amplitude de 95°. Cette résonance se maintient parce que les inclinaisons des orbites sur le plan des anneaux sont assez élevées, supérieures à 1°.

Une théorie réduite à un mouvement képlérien auquel on ajoute la précession des nœuds et des périastres et une perturbation des longitudes moyennes conséquence de la résonance, donne une représentation des orbites de Mimas et Téthys, avec une précision de l'ordre de $0''.20$ géocentrique. Les éléments orbitaux, à l'époque DJ, des deux satellites s'écrivent :

$$\begin{aligned} a &= a_0 & N &= N_0 + \dot{N}\,t \\ e &= e_0 & P &= P_0 + \dot{P}\,t \\ \gamma &= \gamma_0 & \lambda &= \lambda_0 + nd + \delta L. \end{aligned} \tag{8.6.3}$$

Pour Mimas, le terme de libration δL s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta L_1 &= A_1 \sin\psi - 0^\circ.72 \sin 3\psi - 0^\circ.021\,44 \sin 5\psi \\ \text{avec :} \qquad \psi &= \psi_{13}(\tau - \tau_0) \\ \tau &= 1950.0 + (\mathrm{DJ} - 2\,433\,282.423)/365.2422. \end{aligned} \tag{8.6.4}$$

Pour Téthys, le terme de libration δL s'écrit :

$$\delta L_3 = -\frac{x_{13}}{2}\,\delta L_1. \tag{8.6.5}$$

Le rapport $-x_{13}$ des librations dépend du rapport des masses m_1, m_3 et des demi-grands axes a_1 et a_3 de Mimas et Téthys. On a :

$$x_{13} = \frac{a_3}{a_1}\,\frac{m_1}{m_3}.$$

Le couple Encelade-Dioné

Les caractéristiques dynamiques du couple sont essentiellement :

• une précession rapide des nœuds et des périastres provoquée par l'aplatissement de Saturne.

• une libration de faible amplitude et de période 11 ans de l'argument $\theta_{24} = 2\lambda_4 - \lambda_2 - P_2$ autour de 0, due à une commensurabilité 2 : 1 des moyens mouvements. Notons $\overline{\lambda}_2$ et $\overline{\lambda}_4$ les parties linéaires des longitudes moyennes d'Encelade et Dioné. Les théories prennent également en compte un terme à longue période d'argument $\theta'_{24} = 2\overline{\lambda}_4 - \overline{\lambda}_2 - P_4$ et de période 3.8 ans. Les amplitudes dans les longitudes moyennes sont de $12'.54$ pour Encelade et $-1'.04$ pour Dioné.

Les éléments orbitaux d'Encelade, à l'époque DJ, s'écrivent :

$$\begin{aligned} a &= a_0 & N &= N_0 + \dot{N}\,t \\ e &= e_0 & P &= 2\lambda_4 - \lambda_2 \\ \gamma &= \gamma_0 & \lambda &= \lambda_0 + nd + \delta L \end{aligned} \tag{8.6.6}$$

avec $\delta L = p_2 \sin(\nu_{24} t + \mu_{24}) + 12'.54 \sin \theta'_{24}$.
Les éléments orbitaux de Dioné, à l'époque DJ, s'écrivent :

$$\begin{aligned} a &= a_0 & N &= N_0 + \dot{N}\, t \\ e &= e_0 & P &= P_0 + \dot{P}\, t \\ \gamma &= \gamma_0 & \lambda &= \lambda_0 + nd + \delta L \end{aligned} \tag{8.6.7}$$

avec $\delta L = p_4 \sin(\nu_{24} t + \mu_{24}) - 1'.04 \sin \theta'_{24}$.

8.6.2.6. Rhéa, Titan, Japet

Les éléments orbitaux de Rhéa

Les éléments orbitaux initiaux de Rhéa correspondant à l'époque t_0 (DJ=2 426 000.5) sont donnés dans la table 8.6.6.

Table 8.6.6. Éléments orbitaux initiaux de Rhéa pour l'époque t_0 (DJ=2 426 000.5), issus de Harper et Taylor (1993).

Élément	Unité	Rhéa
a_0	UA	0.003 525 59
e_0		0.000 172
γ_0	degré	0.3472
N_0	degré	294.00
ϖ_0	degré	42
λ_0	degré	338.6372
n	degré/jour	79.690 046 87

L'orbite de Rhéa est caractérisée par l'existence d'une excentricité forcée par Titan, supérieure à la partie libre. Cela entraîne une oscillation du périastre de Rhéa autour de celui de Titan avec une période de 36 ans. En outre, l'aplatissement de Saturne et l'action perturbatrice du Soleil provoquent une précession du plan de l'orbite avec une inclinaison constante sur le plan laplacien de Rhéa.

Les éléments orbitaux de Rhéa, à l'époque DJ, s'écrivent :

$$\begin{aligned} a &= a_0 \\ e \sin \varpi &= e_0 \sin(\varpi_0 + 10°.057\, t) + 0.001\,00 \sin \varpi_6 \\ e \cos \varpi &= e_0 \cos(\varpi_0 + 10°.057\, t) + 0.001\,00 \cos \varpi_6 \\ i &= i_A - 0°.045\,50 + \chi \sin \gamma_0 \cos \overline{N} + 0°.020\,07 \cos N_6 \\ N &= \Omega_A - 0°.007\,792 + [\chi \sin \gamma_0 \sin \overline{N} + 0°.020\,07 \sin N_6] / \sin i_A \\ \lambda &= \lambda_0 + nd + \chi \sin \gamma_0 \tan \frac{i_A}{2} \sin \overline{N}. \end{aligned} \tag{8.6.8}$$

Dans les formules (8.6.8), l'indice 6 se rapporte à Titan, $\overline{N} = N_0 - 10°.057\,t$, $N_6 = N_{06} + \dot{N}_{06}\,t$, $\varpi_6 = \varpi_{06} + \dot{\varpi}_6\,t$; les valeurs de $N_{06}, \dot{N}_{06}, \varpi_{06}, \dot{\varpi}_6$ se trouvent dans la table 8.6.7 ; i_A et Ω_A sont l'inclinaison et la longitude du nœud du plan des anneaux sur l'écliptique, déterminées par Harper et Taylor (1993) et définies au paragraphe 8.6.2.2 ; $\chi = 180/\pi$.

Les éléments orbitaux de Titan

Les éléments orbitaux initiaux de Titan correspondant à l'époque t_0 sont donnés dans la table 8.6.7.

Table 8.6.7. Éléments orbitaux initiaux de Titan pour l'époque t_0 (DJ=2 426 000.5), issus de Harper et Taylor (1993).

Élément	Unité	Titan
a_0	UA	0.008 170 06
e_0		0.028 905
γ_0	degré	0.2949
N_0	degré	19.56
ϖ_0	degré	297.278
λ_0	degré	138.8328
n	degré/jour	22.576 976 82
$\dot{\varpi}_0$	degré/an	0.512 73
$\dot{N}_0$	degré/an	−0.512 73

L'orbite de Titan subit quelques perturbations solaires périodiques non négligeables. De plus, sous l'action de l'aplatissement de Saturne et des perturbations séculaires du Soleil, le plan orbital de Titan précesse avec une inclinaison constante sur le plan laplacien. L'excentricité relativement élevée (0.029) de Titan est à l'origine de la partie forcée de l'excentricité de Rhéa. Les mouvements de précession du nœud et du péricentre ont une période d'environ 700 ans.

Les éléments orbitaux de Titan, à l'époque DJ, s'écrivent selon Sinclair (1977), Harper et Taylor (1993) sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
a &= a_0 \\
e &= e_0 - 0.000\,1841\cos 2g + 0.000\,0731\cos 2(L_s - g) \\
i &= i_{ap} + 0.000\,2320\,\chi\cos(2L_s + \psi) \\
N &= \Omega_{ap} + 0.000\,5034\,\chi\sin(2L_s + \psi) \\
\varpi &= \varpi_{ap} + \chi\,[0.006\,3044\sin 2g + 0.000\,250\,27\sin 2(L_s - g)] \\
\lambda &= \lambda_0 + nd + \chi\,[\sin\gamma_0\tan\frac{i_A}{2}\sin N - 0.000\,1757\sin l_s \\
&\qquad - 0.000\,2151\sin 2L_s + 0.000\,0567\sin(2L_s + \psi)]
\end{aligned}
\tag{8.6.9}
$$

où i_{ap}, Ω_{ap}, ϖ_{ap} sont les valeurs approchées de l'inclinaison et des longitudes du nœud et du péricentre. Elles sont données par :

$$\begin{aligned} i_{ap} &= i_A - 0^\circ.6204 + \chi \sin\gamma_0 \cos N \\ \Omega_{ap} &= \Omega_A - 0^\circ.1418 + \chi \sin\gamma_0 \sin N / \sin i_A \\ \varpi_{ap} &= \varpi_0 + \dot{\varpi}_0\, t \end{aligned} \tag{8.6.10}$$

où $N = N_0 + \dot{N}_0\, t$; i_A et Ω_A sont l'inclinaison et la longitude du nœud du plan des anneaux sur l'écliptique, déterminées par Harper et Taylor (1993) et définies au paragraphe 8.6.2.2.

Les angles auxiliaires pour le calcul des perturbations solaires $l_s, \lambda_s, i_s, \Omega_s$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} l_s &= 175^\circ.4762 + 1\,221^\circ.5515\, T_s - 0^\circ.0005\, T_s^2 \\ \lambda_s &= 267^\circ.2635 + 1\,222^\circ.1136\, T_s \\ i_s &= 2^\circ.489\,139 + 0^\circ.002\,435\, T_s - 0^\circ.000\,034\, T_s^2 \\ \Omega_s &= 113^\circ.349\,952 - 0^\circ.259\,679\, T_s - 0^\circ.000\,038\, T_s^2 \end{aligned} \tag{8.6.11}$$

où $T_s = (\mathrm{DJ} - 2\,415\,020)/365\,25$.

Les autres angles auxiliaires ψ et g qui interviennent dans les formules (8.6.9) sont donnés par :

$$\begin{aligned} \cos\Gamma &= \cos i_s \cos i_{ap} + \sin i_s \sin i_{ap} \cos(\Omega_{ap} - \Omega_s) \\ \sin\Gamma \sin\psi &= \sin i_s \sin(\Omega_{ap} - \Omega_s) \\ \sin\Gamma \cos\psi &= \cos i_s \sin i_{ap} - \sin i_s \cos i_{ap} \cos(\Omega_{ap} - \Omega_s) \\ \sin\Gamma \sin\Theta' &= \sin i_{ap} \sin(\Omega_{ap} - \Omega_s) \\ \sin\Gamma \cos\Theta' &= -\sin i_s \cos i_{ap} + \cos i_s \sin i_{ap} \cos(\Omega_{ap} - \Omega_s) \\ \Theta &= \Theta' + \Omega_s \\ L_s &= \lambda_s - \Theta \\ g &= \varpi_{ap} - \Omega_{ap} - \psi. \end{aligned} \tag{8.6.12}$$

Dans les formules (8.6.9) et (8.6.10), $\chi = 180/\pi$.

Les éléments orbitaux de Japet

Les éléments orbitaux initiaux de Japet correspondant à l'époque t_0 sont donnés dans la table 8.6.8.

La dynamique de Japet est caractérisée par une inclinaison de l'orbite sur le plan des anneaux assez forte (15°) et par l'importance des perturbations périodiques dues au Soleil sur tous les éléments de l'orbite. Il faut également prendre en compte quelques termes perturbateurs périodiques dus à l'action de Titan. L'ensemble des termes périodiques non négligeables peut être trouvé dans Harper et Taylor (1993). La nécessité de tenir compte de nouveaux termes périodiques dans les théories de Japet, Titan, Rhéa, a été mise en évidence par Vienne (1991).

Table 8.6.8. Éléments orbitaux initiaux de Japet pour l'époque t_0 (DJ=2 426 000.5), issus de Harper et Taylor (1993).

Élément	Unité	Japet
a_0	UA	0.023 811 70
e_0		0.028 8367
i_0	degré	18.020 66
N_0	degré	141.4750
ϖ_0	degré	357.824
λ_0	degré	216.997 43
n	degré/jour	4.537 951 65
$\dot{N}$	degré/siècle	−3.7119
$\dot{\varpi}$	degré/siècle	12.285

Omettant les termes périodiques, les éléments orbitaux de Japet, à l'époque DJ, s'expriment par :

$$\begin{aligned} a &= a_0 \\ e &= e_0 + \dot{e}T \\ i &= i_0 + i_a T + i_b T^2 + i_c T^3 \\ N &= N_0 + \dot{N}T + \Omega_b T^2 + \Omega_c T^3 \\ \varpi &= \varpi_0 + \dot{\varpi}T \\ \lambda_0 &= \lambda_0 + nd \end{aligned} \tag{8.6.13}$$

où T et d sont les quantités définies par (8.6.2).

Les termes polynomiaux en T présents dans les expressions de l'excentricité, de l'inclinaison, du nœud et du péricentre de l'orbite correspondent à des expressions approchées des termes à longue période, en particulier la précession du nœud et du péricentre dont la période est de 3000 ans. Les coefficients de T, T^2, T^3 ont les valeurs :

$$\begin{aligned} &\dot{e} = 0.001\,156 \\ &i_a = -1°.012\,5 \qquad i_b = -0°.064\,8 \qquad i_c = 0°.005\,4 \\ &\Omega_b = \ \ 0°.127 \qquad \Omega_c = 0°.008. \end{aligned} \tag{8.6.14}$$

8.6.2.7. Hypérion

L'effet perturbateur dominant la dynamique d'Hypérion est dû à l'action gravitationnelle de Titan. Plusieurs caractéristiques rendent l'étude de ce problème assez difficile :

• l'existence d'une commensurabilité 3 : 4 entre les moyens mouvements d'Hypérion et de Titan ;

• la valeur élevée des demi-grands axes ($a/a' \sim 0.825$) qui rend difficile le développement de la fonction perturbatrice sous sa forme habituelle ;

• l'excentricité non négligeable de Titan (0.029) ;

• l'existence de nombreux termes à courte période non négligeables ;

• l'existence de perturbations solaires importantes du fait de l'éloignement de la planète.

L'argument $4\lambda - 3\lambda' - \varpi$ où λ, λ' et ϖ sont, respectivement, les longitudes moyennes d'Hypérion et de Titan et la longitude du péricentre d'Hypérion, oscille autour de 180° avec une grande amplitude ; il en résulte une libration en longitude d'amplitude 9° et de période 21 mois. L'excentricité de l'orbite de Titan entraîne d'autre part une oscillation forcée de longue période dont l'argument est égal à la différence des parties linéaires des longitudes des péricentres de Titan et Hypérion. La période de cette oscillation est d'environ 19 ans, son amplitude de 13°.7 en longitude et de 0.024 sur l'excentricité.

Woltjer (1928) développa une théorie d'Hypérion tenant compte des termes perturbateurs à longue période provenant de la résonance ; il construisit également des tables lui permettant de calculer les perturbations à courtes périodes pour les dates d'observations.

Cependant, lorsqu'à partir de 1967, furent publiées de nouvelles observations d'Hypérion, on put se rendre compte que les résidus obtenus à partir de la théorie de Woltjer étaient supérieurs à ceux relatifs aux autres satellites à l'exception de Japet. Taylor et al. (1987) déterminèrent, par l'analyse spectrale des résidus obtenus en comparant la théorie de Woltjer avec une intégration numérique, de nouveaux termes à courte période d'amplitude supérieure à 1000 km dans les éléments orbitaux d'Hypérion. Dourneau (1987) détermina à nouveau les constantes de la théorie en utilisant un siècle d'observations. Enfin, dans un travail récent, Vienne et Duriez (1991) ont mis en évidence de nouveaux termes à courte période d'amplitude supérieure à 1000 km dans les éléments orbitaux d'Hypérion.

Pour la date julienne DJ, les éléments orbitaux s'écrivent selon Dourneau (1987) :

$$a = a_0 - 0.000\,034\,22\cos\tau - 0.000\,000\,67\cos(\zeta+\tau) + 0.000\,000\,71\cos(\zeta-\tau)$$

$$\begin{aligned} e = e_0 &- 0.004\,099\cos\tau - 0.000\,167\cos(\zeta+\tau) + 0.000\,235\cos(\zeta-\tau) \\ &+ 0.023\,03\cos\zeta - 0.002\,12\cos 2\zeta + 0.000\,151\cos 3\zeta + 0.000\,13\cos\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i = (i_a - 0^\circ.747) &+ \chi\sin\gamma_0\cos(N_0 + \dot{N}t) + 0^\circ.315\cos(42^\circ.02 - 0^\circ.5118\,t_T) \\ &- 0^\circ.018\cos(13^\circ. + 24^\circ.44\,t) + 0^\circ.0180\cos(184^\circ.8 - 35^\circ.41\,T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = (\Omega_a - 0^\circ.13) &+ [\chi\sin\gamma_0\sin(N_0 + \dot{N}t) + 0^\circ.315\sin(42^\circ.02 - 0^\circ.5118\,t_T) \\ &- 0^\circ.018\sin(13^\circ. + 24^\circ.44\,t) + 0^\circ.0168\sin(177^\circ.3 - 35^\circ.41\,T)]/\sin(i_a - 0^\circ.747) \end{aligned} \tag{8.6.15}$$

$$\begin{aligned} \varpi = (\varpi_0 &+ \dot{\varpi}\,t + \gamma_0\tan(\frac{i_a - 0^\circ.747}{2})\sin(N_0 + \dot{N}t)) \\ &- 0^\circ.4457\sin\tau - 0^\circ.2657\sin(\zeta+\tau) - 0^\circ.3573\sin(\zeta-\tau) - 12^\circ.872\sin\zeta \\ &+ 1^\circ.668\sin 2\zeta - 0^\circ.2419\sin 3\zeta - 0^\circ.07\sin\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_0 &+ n t_d + \gamma_0\tan(\frac{i_a - 0^\circ.747}{2})\sin(N_0 + \dot{N}t) + 9^\circ.142\sin\tau \\ &+ 0^\circ.007\sin 2\tau - 0^\circ.014\sin 3\tau + 0^\circ.2275\sin(\zeta+\tau) + 0^\circ.2112\sin(\zeta-\tau) \end{aligned}$$

$$- 0^\circ.260 \sin\zeta - 0^\circ.0098 \sin 2\zeta - 0^\circ.013 \sin(176^\circ + 12^\circ.22t)$$
$$+ 0^\circ.017 \sin(8^\circ + 24^\circ.44t) - 0^\circ.0303 \sin\phi$$

où i_a et Ω_a sont l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant du plan des anneaux sur l'écliptique, déterminées par Dourneau (1987) et définies au paragraphe 8.6.2.2 et où :

$$\begin{array}{lll} t_d = \mathrm{DJ} - 2\,415\,020 & t = t_d/365.25 & \\ T = (\mathrm{DJ} - 2\,442\,000.5)/365.25 & t_T = (\mathrm{DJ} - 2\,411\,368)/365.25 & \\ \tau = \tau_0 + \dot{\tau} t_d & \zeta = \zeta_0 + \dot{\zeta} t & \phi = \phi_0 + \dot{\phi} t. \end{array} \qquad (8.6.16)$$

Les éléments orbitaux correspondant à l'époque DJ = 2 415 020 sont donnés dans la table (8.6.9).

Table 8.6.9. Éléments orbitaux initiaux d'Hypérion correspondant à l'époque DJ = 2 415 020, issus de Dourneau (1987).

Élément	Unité	Hypérion
a_0	(∗)	214.079
e_0		0.103 458
γ_0	degré	0.6435
λ_0	degré	177.047
ϖ_0	degré	69.898
N_0	degré	94.9
n	degré/jour	16.919 938 29
$\dot{\varpi}$	degré/an	−18.670 88
$\dot{N}$	degré/an	−2.292
τ_0	degré	92°.39
$\dot{\tau}$	degré/jour	0.562 1071
ζ_0	degré	148°.19
$\dot{\zeta}$	degré/an	−19.28
ϕ_0	degré	−32.2
$\dot{\phi}$	degré/an	−61.7818

(∗) en secondes de degré à la distance de 9.538 937 ua

8.6.2.8. Phœbé

Phœbé occupe une place particulière dans le système de Saturne. Dans l'ensemble des satellites connus avant les découvertes récentes des années 1980-1981, il est le plus petit et le plus éloigné de

Saturne. En outre, son orbite est rétrograde. Son éloignement du corps central a pour conséquence que la dynamique de Phœbé est essentiellement dominée par l'action du Soleil : l'accélération provoquée par Jupiter est environ égale à 1% de celle due au Soleil, celle provoquée par Titan représentant 0.1%.

Le mouvement de Phœbé a été décrit dès 1905 par Ross (1905) à partir d'une série de clichés photographiques pris entre 1899 et 1905. Zadunaïsky (1954) a utilisé des observations faites entre 1907 et 1952 pour améliorer l'orbite de Ross. Les travaux les plus récents ont choisi la voie de l'intégration numérique pour améliorer l'orbite de Phœbé (Rose, 1979 ; Bec-Borsenberger et Rocher, 1982 ; Bykova et Shikhalev, 1984). Dans le travail de Bec-Borsenberger et Rocher (1982), les équations du mouvement prennent en compte les effets de Jupiter et de Titan, en plus de celui du Soleil. Leur intégration numérique est ajustée sur un ensemble d'observations faites entre 1904 et 1989. Nous donnons dans la table 8.6.10 les conditions initiales, coordonnées et vitesses, issues de cet ajustement, pour l'époque t_0 =14 janvier 1970, 0 h TE (DJ 2 440 600.5). Ces conditions initiales sont exprimées dans le repère saturnocentrique défini par l'équateur et l'équinoxe J2000.

Table 8.6.10. Conditions initiales de l'orbite de Phœbé pour le 14 janvier 1970, 0 h TE (DJ 2 440 600.5), issues de Bec-Borsenberger et Rocher (1982).

Coordonnée	Unité	Phœbé
x_0	ua	−0.082 224 0966
y_0	ua	0.035 857 4244
z_0	ua	0.026 033 3383
$\dot{x}_0$	ua/jour	0.000 285 377 7271
$\dot{y}_0$	ua/jour	0.000 798 461 4277
$\dot{z}_0$	ua/jour	0.000 342 972 0128

8.6.3. La dynamique des nouveaux satellites de Saturne

8.6.3.1. Généralités

Nous présentons dans la table 8.6.11 quelques paramètres dynamiques et physiques des satellites de Saturne découverts depuis 1966, soit par des observations au sol, soit par les sondes Voyager.

Les périodes orbitales sont des périodes sidérales et les magnitudes sont les magnitudes moyennes à l'opposition. Janus et Épiméthée mis à part, ces satellites sont de faibles dimensions et de magnitude élevée. Ils ont tous des orbites quasi circulaires dans un plan très peu incliné sur le plan des anneaux. Les notations sont les mêmes qu'au paragraphe 8.6.2.1 ; on trouvera en 2.4 un ensemble plus complet de données sur ces satellites.

Table 8.6.11. Principales caractéristiques des nouveaux satellites de Saturne.

		ancienne dénomination	$a_1 \times a_2 \times a_3$ ou a_s (km)	a (10^3 km)	I (degré)	e	P (jours)	m_v	E_m (′)(″)
X	Janus	1980 S1	97.0×95.0×77.0	151.47	0.14	0.007	0.6947	14	24
XI	Épiméthée	1980 S3	69.0×55.0×55.0	151.42	0.34	0.009	0.6943	15	24
XII	Hélène	1980 S6	16	378.06	0.15	0.005	2.7391	17	1 01
XIII	Télesto	1980 S13	15 × 12.5 × 7.5	294.66			1.8878		48
XIV	Calypso	1980 S25	15.0 × 8.0 × 8.0	294.66			1.8878	18.5	48
XV	Atlas	1980 S28	18.5 × 17.2 × 13.5	137.67	0.3	0.002	0.6019	18	22
XVI	Prométhée	1980 S27	74.0×50.0×34.0	139.35	0	0.002	0.6130	15	23
XVII	Pandore	1980 S26	55.0×44.0×31.0	141.70	0	0.004	0.6285	15.5	23
XVIII	Pan	1981 S13	∼ 10	133.6			0.5750	18	21

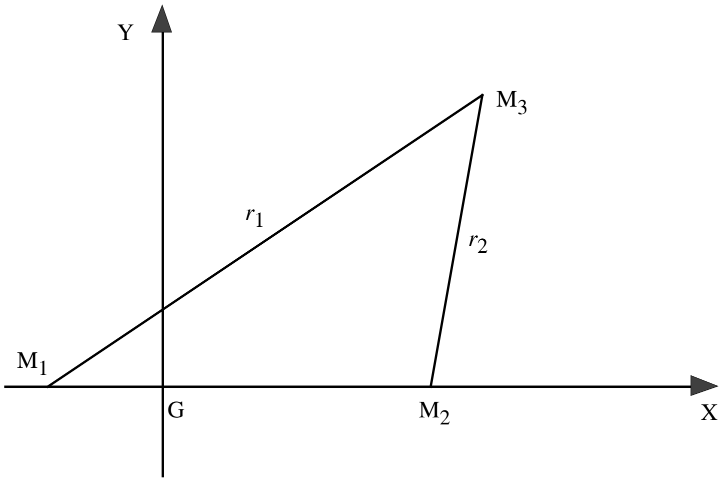

Fig. 8.6.4. Problème restreint circulaire plan.

8.6.3.2. Les satellites lagrangiens : Janus, Épiméthée, Hélène, Télesto, Calypso

L'analyse des observations de Hélène, Télesto et Calypso a permis de montrer que le problème restreint circulaire plan des trois corps représente de façon déjà très satisfaisante les propriétés dynamiques des cinq premiers satellites. Ce problème est illustré sur la figure 8.6.4. M_1 et M_2 sont deux corps de masses m_1 et m_2 décrivant des orbites circulaires autour de leur centre de masse G, sous l'effet de leur attraction mutuelle ; n représente le moyen mouvement de M_1 et M_2 sur leur orbite ; r_1 et r_2 sont les distances respectives de M_3 à M_1 et M_2. La masse m_3 de M_3 est supposée négligeable, ce qui revient à dire que M_3 ne perturbe pas les mouvements de M_1 et M_2. On écrit les équations du mouvement de M_3 perturbé par M_1 et M_2, dans le repère GXY tournant avec la vitesse angulaire n. Notant X, Y, Z les coordonnées de M_3 dans le repère tournant, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} - 2n\,\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial\Omega}{\partial X}\\ \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}t^2} - 2n\,\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial\Omega}{\partial Y}\\ \frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\partial\Omega}{\partial Z}\end{aligned} \tag{8.6.17}$$

avec :

$$\Omega = \frac{n^2}{2}\,(X^2 + Y^2) + \frac{k^2 m_1}{r_1} + \frac{k^2 m_2}{r_2}.$$

Ce système admet l'intégrale première, dite intégrale de Jacobi :

$$J = \frac{1}{2}\,(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - \Omega.$$

Laplace a montré en 1772 que le système différentiel (8.6.17) admet comme solutions particulières cinq points d'équilibre, les points de Lagrange L_1, L_2, L_3 alignés avec M_1 et M_2, L_4 et L_5 formant avec M_1 et M_2 deux configurations équilatérales (Fig. 8.6.5).

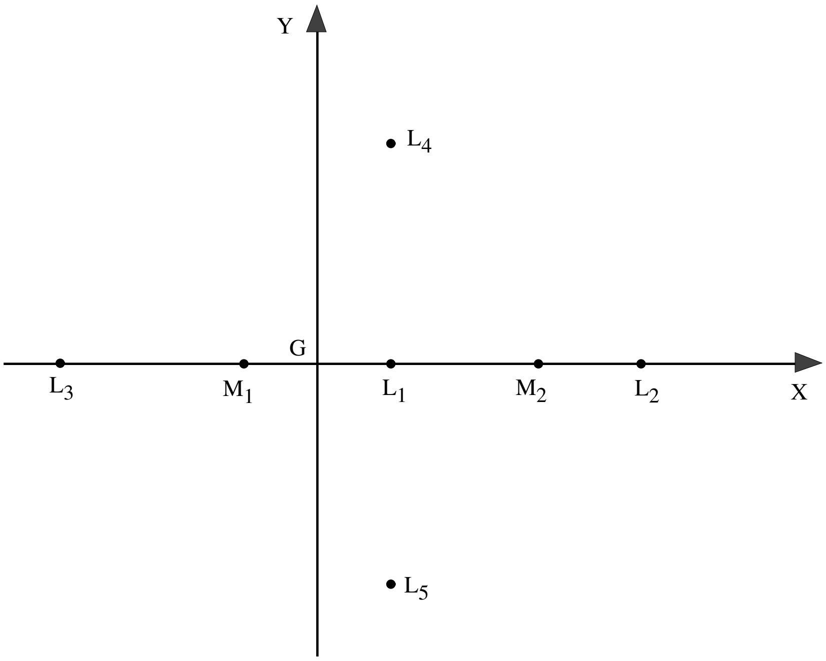

Fig. 8.6.5. Les points d'équilibre de Lagrange.

La découverte en 1906 des planètes troyennes qui gravitent au voisinage des points équilatéraux L_4 et L_5 du système Soleil-Jupiter, montra la première réalisation physique observée des solutions d'équilibre de Lagrange au voisinage des points équilatéraux. Les premiers nouveaux satellites de Saturne sont des illustrations de ce type d'orbites qui n'avaient jamais été observées dans un système de satellites avant les découvertes récentes faites dans le système de Saturne.

Hélène, Télesto, Calypso

Hélène gravite sur l'orbite de Dioné et le précède en moyenne de 60° sur une orbite oscillant autour du point de Lagrange L_4 du système Saturne-Dioné. Télesto et Calypso gravitent sur l'orbite de Téthys, Télesto oscillant autour de L_4 et Calypso autour de L_5. La figure 8.6.6 représente le schéma des orbites de ces trois satellites dans les repères tournant avec les moyens mouvements de Dioné et Téthys.

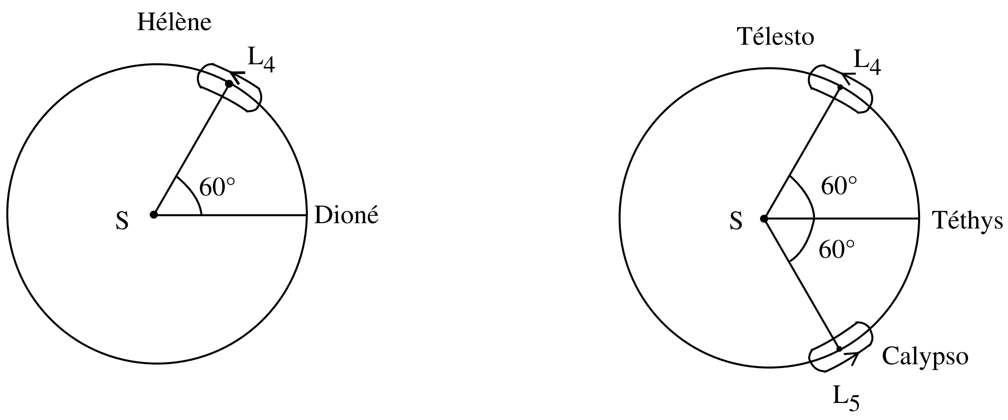

Fig. 8.6.6. Schéma des orbites d'Hélène, Télesto et Calypso dans les repères tournants.

On montre que pour une valeur du rapport m_2/m_1 suffisamment petite, les points de Lagrange L_4 et L_5 sont stables pour le problème linéarisé.

Des théories de ces trois satellites ont été développées par Oberti (1988, 1990a) en prenant en compte les perturbations au problème restreint circulaire plan : l'aplatissement de Saturne, l'excentricité de l'orbite de Dioné, les orbites résonantes de Dioné et Téthys, les perturbations de Titan et du Soleil. Oberti montre que ces perturbations ne modifient pas sensiblement l'allure générale du mouvement et que l'aplatissement de Saturne produit la perturbation la plus forte.

Les constantes des théories sont ajustées sur un ensemble d'observations faites pour la plupart par Veillet entre 1980 et 1985. Les théories des trois satellites présentent avec les observations des différences dont l'écart-type est de l'ordre de $0''.35$ à $0''.55$ selon les satellites.

L'angle de séparation entre Dioné et Hélène vu de Saturne est affecté de deux librations, l'une à courte période de 2.73 jours, l'autre à longue période de 775 jours. Les angles de séparation, vus de Saturne, entre Téthys et Télesto, et Téthys et Calypso sont affectés de deux librations. Les périodes de libration pour Télesto et Calypso sont de 1.89 jour et 695 jours. Les amplitudes de ces librations sont très différentes, 30° pour Hélène, 17° pour Calypso et 6° pour Télesto.

Les satellites coorbitaux Janus et Épiméthée

Janus et Épiméthée se déplacent sur deux orbites extrêmement voisines ; la somme des diamètres des deux satellites est supérieure à la différence des rayons de leurs orbites. Lorsque les deux satellites se rapprochent l'un de l'autre, un transfert de moment cinétique du satellite extérieur vers le satellite intérieur conduit à un échange des orbites, la différence entre les demi-grands axes restant pratiquement constante. Ce type d'orbites, dites *orbites en fer à cheval* , avait été l'objet de travaux théoriques (Brown, 1911, Rabe, 1961) bien avant leur observation. Ces orbites sont caractérisées par une libration de grande amplitude, et contiennent les points d'équilibre L_3, L_4, L_5.

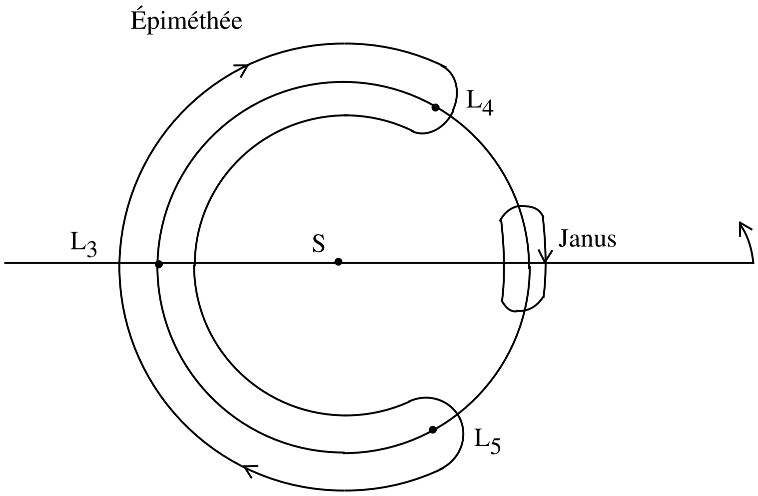

Fig. 8.6.7. Schéma des orbites de Janus et Épiméthée dans le repère tournant.

La figure 8.6.7 représente les trajectoires des deux satellites dans un repère tournant avec le moyen mouvement moyen des satellites. Ils ne peuvent pas se rapprocher indéfiniment et entrer en collision (leur distance minimum est de 15 000 km environ). Par ailleurs, l'influence des autres satellites coorbitaux est faible. L'étude dynamique de Janus et Épiméthée a été développée par plusieurs auteurs dont Yoder et al. (1983), Lissauer et al. (1985), Dermott et Murray (1981a, 1981b).

8.6.3.3. Les satellites bergers : Atlas, Prométhée, Pandore

Les satellites Prométhée et Pandore encadrent l'anneau F découvert par la sonde Pionneer en septembre 1979. Cet anneau est situé à une distance de 140 000 km du centre de Saturne, tandis

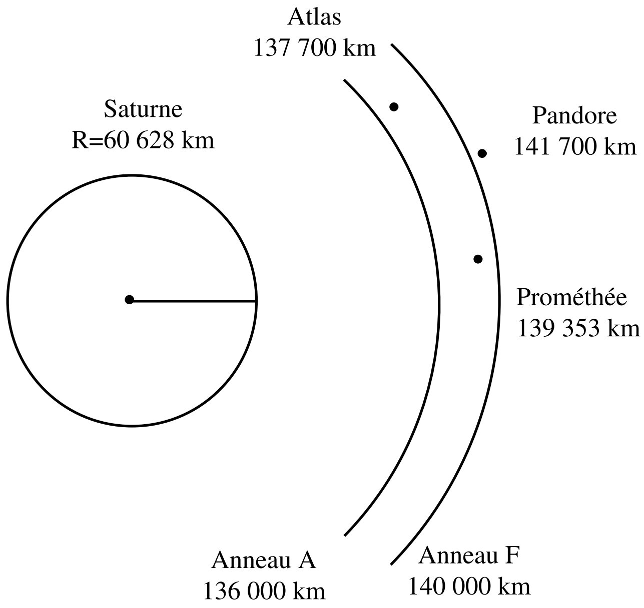

Fig. 8.6.8. Les satellites bergers.

que les demi-grands axes de Prométhée et Pandore sont respectivement de 139 353 et 141 700 km (Fig. 8.6.8).

On pense que l'action gravitationnelle des deux satellites empêche l'anneau de s'étaler, d'où l'appellation de satellites bergers qui leur est parfois donnée (Soderblom et Johnson, 1982 ; Pollack et Cuzzi, 1982). Ces satellites semblent également être responsables des déformations de l'anneau F.

Atlas a été découvert par la sonde Voyager 1, un peu au-delà du bord extérieur de l'anneau A ; il semble que l'action gravitationnelle du satellite sur les particules de l'anneau soit responsable de la netteté du bord de l'anneau.

8.6.3.4. Le satellite Pan

Les observations du satellite Pan ont permis la détermination du demi-grand axe a de son orbite et de son moyen mouvement n :

$$a = 133\,528.8 \text{ km}$$
$$n = 626°.044 \pm 0.006 \text{ /jour}$$

Pan est le premier satellite découvert à l'intérieur des principaux anneaux de Saturne ; l'analyse des images n'a pas permis pour l'instant d'observer des satellites analogues à l'intérieur de la division de Cassini. Son effet de berger est responsable de la conservation de la structure de la division d'Encke et il pourrait être à l'origine d'un petit anneau étroit à l'intérieur de la division.

8.7. LES SATELLITES D'URANUS

8.7.1. Découverte et observations

Uranus est accompagné dans son mouvement autour du Soleil par quinze satellites et par des anneaux. La découverte des cinq satellites principaux, dont les magnitudes visuelles vont de 14 à 16, est due à des observations télescopiques. Les satellites sont numérotés de I à V dans l'ordre de leur distance à la planète (I : Ariel, II : Umbriel, III : Titania et IV : Obéron), sauf pour le dernier (V : Miranda) qui gravite sur une orbite intérieure aux quatre premiers. Neuf anneaux ont été découverts en 1977 depuis la Terre lors de l'observation par plusieurs équipes de l'occultation de l'étoile SAO 158 687 par Uranus. Ils sont tous intérieurs à l'orbite de Miranda et notés dans l'ordre de leur distance à Uranus : 6, 5, 4, α, β, η, γ, δ, ε. Les dix petits satellites faibles dont les magnitudes visuelles vont de 20 à 24 ont été découverts par la sonde Voyager 2 en décembre 1985 et janvier 1986. Ils sont numérotés de VI à XV, dans l'ordre de leurs distances à Uranus (VI : Cordélia, VII : Ophélie, VIII : Bianca, IX : Cressida, X : Desdémone, XI : Juliette, XII : Portia, XIII : Rosalinde, XIV : Belinda et XV : Puck). Ils sont tous distribués sur des orbites intérieures à celle de Miranda et extérieurs à l'anneau δ. Cordélia et Ophélie sont de part et d'autre de l'anneau ε pour lequel ils jouent le rôle de satellites bergers. D'autres anneaux ont également été détectés par la sonde Voyager 2, en particulier l'anneau 1986 U1R, situé entre l'orbite de Cordélia et l'anneau ε.

Le système d'Uranus est caractérisé par des objets dont les orbites sont très faiblement excentriques (aucune excentricité n'excède 0.005, sauf celle d'Ophélie qui atteint 0.01) et faiblement inclinées sur l'équateur de la planète (inclinaisons inférieures à $0^\circ.3$ sauf pour Miranda qui possède une inclinaison de $4^\circ.3$). Le mouvement des satellites lorsqu'il est rapporté au plan de l'écliptique est rétrograde ; en effet les satellites gravitent dans le plan de l'équateur d'Uranus qui est incliné approximativement de 98° sur le plan de l'écliptique. On se reportera aux tables 2.14, 2.17 et 2.18 pour avoir une vue d'ensemble sur les données relatives aux satellites des planètes. Nous rassemblons dans la table 8.7.1 les éléments relatifs aux cinq satellites principaux. Les excentricités et les inclinaisons ont généralement de grandes variations sur une période de temps de 50 ans autour de 1980. On donne les minimums et maximums sur cet intervalle de temps.

Herschel observe pour la première fois les deux satellites les plus éloignés, Titania et Obéron, en janvier 1787 soit presque six ans seulement après la découverte de la planète. Si la découverte d'Uranus est le fruit du hasard, celle des satellites est due à la persévérance et aux qualités d'observateur d'Herschel qui par analogie avec les systèmes de Jupiter et de Saturne rechercha très vite des objets autour d'Uranus. La découverte de Neptune en 1846 par Adams et Le Verrier, obtenue grâce à l'étude des irrégularités du mouvement d'Uranus, suscite un nouvel intérêt pour une détermination précise de la masse d'Uranus, et par conséquent la curiosité des observateurs pour son système de satellites. Lassel, encore une fois depuis l'Angleterre, retrouve en 1851 les satellites Ariel et Umbriel qu'il avait déjà repérés en novembre 1847 (Veillet, 1983b).

C'est à partir de 1852 que les satellites sont désignés d'après des personnages de Shakespeare pour Titania et Obéron (*A Midsummer-Night's Dream*) et Pope pour Ariel et Umbriel (*The Rape of the Lock*). Newcomb en 1875, à l'observatoire naval de Washington, publie une étude complète du système d'Uranus et développe de longues séries d'observations qui le conduisent à adopter pour la masse d'Uranus 1/22 600 masse solaire, valeur très proche de la détermination actuelle. Depuis cette époque jusqu'en 1928, les satellites d'Uranus sont observés régulièrement, par Holden

Table 8.7.1. Éléments d'orbite des cinq satellites principaux d'Uranus.

Satellite	demi-grand axe de l'orbite (10^3km)	Excentricité	Inclinaison (degré)
Miranda (V)	130	0.0010 - 0.0016	4.34
Ariel (I)	191	0.0003 - 0.0020	0.01 - 0.07
Umbriel (II)	266	0.0032 - 0.0047	0.09 - 0.17
Titania (III)	436	0. - 0.0028	0.04 - 0.12
Obéron (IV)	584	0. - 0.0031	0.02 - 0.12

et Hall à Washington, et aussi par les frères Henry à Paris, Aitken à Lick, H. Struve et son fils G. Struve à Berlin pour ne citer que quelques noms. Il faut attendre 1948 pour que le satellite V soit photographié par Kuiper pour la première fois à l'observatoire de McDonald. Il lui donne le nom de Miranda, personnage de *The Tempest* de Shakespeare. Enfin, durant la période qui a précédé la rencontre de Voyager 2 avec Uranus une intense activité s'est développée pour l'observation des satellites avec Greenberg, Whittaker et Mulholand à McDonald, Walker à Flagstaff, Veillet au Pic du Midi, au CFH (Canada France Hawaï) et à l'ESO (European Southern Observatory).

8.7.2. Théorie du mouvement

L'ensemble des cinq satellites principaux d'Uranus forme un petit système planétaire à l'image des quatre satellites galiléens de Jupiter, Io, Europe, Ganymède et Callisto. Il existe en effet beaucoup de ressemblance entre ces deux systèmes : la durée de la révolution sidérale s'étend de 1.4 jours pour Miranda jusqu'à 13.5 jours pour Obéron ; comme nous l'avons signalé plus haut, les excentricités et les inclinaisons sur l'équateur de la planète sont faibles ; enfin, il existe une quasi commensurabilité entre les moyens mouvements de Miranda, Ariel et Umbriel :

$$N_M - 3N_A + 2N_U = -0.0785°/\text{jour}.$$

Contrairement à ce qui se passe dans le cas des satellites galiléens pour lesquels on observe une libration de l'argument critique autour de 180°, pour le système d'Uranus, l'angle résultant de la combinaison linéaire des 3 longitudes moyennes : $L_M - 3L_A + 2L_U$ circule lentement en 12.5 ans. Par analogie avec le système des satellites de Jupiter, cette quasi-résonance est aussi dite *laplacienne*.

Nous avons déjà mentionné qu'un des objectifs principaux de l'étude des satellites d'Uranus est la détermination précise de la masse de la planète centrale. Des informations complémentaires sur l'aplatissement de la planète et sur les masses des satellites peuvent être tirées de la théorie de leurs mouvements, en particulier des mouvements de précession des lignes des apsides et des nœuds des orbites. Les perturbations qui contribuent aux inégalités du mouvement des satellites ont trois origines :

– l'aplatissement de la planète (effet des harmoniques sphériques J_2 et J_4 du potentiel),

– les interactions mutuelles qui interviennent dans le petit système planétaire composé des cinq satellites réduits à des objets ponctuels,

– le Soleil.

La contribution du terme d'aplatisssement en J_2 est la plus importante ; c'est elle qui entraîne les mouvements de précession de la ligne des apsides et de celle des nœuds, signalés par les observations télescopiques. Les perturbations mutuelles sont de trois sortes : les *pertubations séculaires* qui existent dans tout système planétaire et qui sont obtenues par la résolution du système appelé *système de Laplace-Lagrange* ; les perturbations à courte période proportionnelles, en première approximation, aux masses des satellites ; enfin les perturbations mutuelles induites par la quasi-commensurabilité des mouvements des satellites Miranda, Ariel et Umbriel, et qui est un effet du second ordre des masses. Les perturbations solaires ont une amplitude faible.

Jusqu'en 1986, les modèles de solutions qui ont été introduits pour représenter le mouvement des satellites et leurs éphémérides étaient des orbites animées d'un mouvement de précession des apsides et des nœuds, complétées éventuellement par les termes de la résonance laplacienne et de ses multiples. La quasi-commensurabilité des moyens mouvements entraîne en effet la présence d'un petit diviseur dans l'intégration des équations différentielles du mouvement et conduit à un effet amplificateur qui possède une longue période devant les périodes propres des satellites et dont l'amplitude est sensible dans les observations télescopiques. Après G. Struve en 1912, Harris en 1949 puis Dunham en 1971 ont réduit un nombre important d'observations et déterminé la masse d'Uranus ainsi que les éléments d'orbite des satellites (moyens mouvements, positions et mouvements de précession des périastres et des nœuds). Veillet a repris l'ensemble de ces travaux l'enrichissant de nombreuses observations nouvelles (Veillet, 1983a). La mesure de l'amplitude de la résonance laplacienne dans le mouvement de Miranda par Lazzaro et al. (1984) a permis une évaluation du produit des masses $m_A\ m_U$, mais les déterminations des masses individuelles des satellites, et en particulier des satellites extérieurs, restaient imparfaites.

À partir de 1986 Laskar construit une théorie plus complète du mouvement des cinq satellites (GUST, *General Uranian satellite theory*) prenant en compte les perturbations séculaires mutuelles mais aussi les effets à courte période qui avaient été négligés jusqu'alors. En fait, cette étude a pu montrer que les perturbations à courte période (de l'ordre de quelques jours) étaient d'amplitude suffisamment grande (plus de 100 km) pour pouvoir être détectées dans les observations terrestres existantes, et surtout dans les clichés du système des satellites pris par Voyager 2 lors de son approche de la planète. Contrairement aux prévisions initiales de la mission qui n'avaient pas pris en compte l'existence de ces perturbations, Taylor et al. (1986) ont pu effectuer une détermination des masses de l'ensemble des satellites par ajustement d'une intégration numérique aux observations de la sonde. Laskar et Jacobson (1987) ont ajusté la solution analytique GUST à l'ensemble des observations terrestres de 1911 à 1986, ainsi qu'aux données optiques et radio de Voyager 2, en confirmant les valeurs des masses obtenues, et en fournissant une éphéméride entièrement analytique (GUST86) qui rend compte du mouvement de ces satellites sur une durée correspondant aux 75 années d'observations disponibles. La précision interne de cette théorie, mesurée par comparaison à une intégration numérique de référence effectuée sur 12 ans est estimée à quelques dizaines de kilomètres, alors que sa précision effective, qui est du même ordre au voisinage de 1986, date de la rencontre entre Voyager et Uranus, est sensiblement moins bonne quand on s'éloigne de cette date. La solution analytique GUST86 sert actuellement de référence pour l'établissement des éphémérides des satellites d'Uranus.

C'est une forme abrégée de la solution GUST que nous reproduisons ci-dessous, ne conservant que les termes séculaires et périodiques dont l'effet géocentrique global est supérieur à $0''.05$. La forme complète de la solution est donnée dans Laskar et Jacobson (1987).

8.7.3. Éléments orbitaux et masses des satellites

Dans les formules simplifiées qui servent au calcul des éléments orbitaux nous adoptons les conventions d'écriture suivantes :

• n est le moyen mouvement osculateur ; il est lié au demi-grand axe a par la troisième loi de Kepler, soit : $n^2a^3 = GM_U(1 + m/M_U)$; n est mesuré en radian/jour ;

• L est la longitude moyenne ; elle est comptée en radian ;

• z est le *vecteur excentricité* ; c'est un vecteur complexe : $z = e \exp \sqrt{-1}\varpi$ où e est l'excentricité et ϖ la longitude du périastre ;

• ζ est le *vecteur polaire* de l'orbite ; $\zeta = sin(i/2) \exp \sqrt{-1}\Omega$ où Ω est la longitude du nœud ascendant de l'orbite, et i son inclinaison ;

z et ζ sont sans dimension.

Le temps, les masses et le système de référence sont définis avec les conventions d'écriture suivantes :

• T est le temps mesuré à partir de la date julienne 2444 239.5 (1 janvier 1980 à 0 h), soit : $T = \mathrm{DJ} - 2444\,239.5$;

• M_U est la masse d'Uranus ; $GM_U = 5794\,554.5\ \mathrm{km^3 s^{-2}}$;

• m est la masse du satellite ;

• Les éléments elliptiques du satellite sont rapportés au système de référence uranocentrique, noté UME50* et défini comme suit : le plan de référence est l'équateur moyen d'Uranus en 1950 orienté par le moment angulaire de la planète dans la direction du pôle sud de la planète selon la définition de l'UAI donnée au paragraphe 10.1. L'origine des axes est le nœud ascendant de l'équateur céleste moyen B1950.0 sur ce plan.

Les chiffres arabes de 1 à 5 désignent les satellites dans l'ordre de leurs distances à partir d'Uranus. Nous donnons dans la table 8.7.2 les masses et les fréquences des cinq satellites principaux d'après Laskar et Jacobson (1987) ; les valeurs des masses sont légèrement différentes de celles données dans la table 2.17. Dans cette table :

k est le numéro du satellite et m_k sa masse ($k = 1, 2, .., 5$) ;

N_k est le moyen mouvement moyen du satellite ou *fréquence propre* ;

E_k et I_k sont les fréquences associées aux variables excentricités et inclinaisons du système séculaire de Laplace-Lagrange. On les désigne parfois sous le nom de *fréquences libres* associées à e et i (ou bien z et ζ) ;

La fréquence de la résonance laplacienne est désignée par le symbole $\nu = -0.001\,370\,785$ radian/jour. La période associée est de 12.549 ans.

Table 8.7.2. Masses et fréquences des cinq satellites principaux (Laskar et Jacobson, 1987).

k	Satellite	m_k/m_U 10^{-5}	N_k radian/jour	E_k radian/jour	I_k radian/jour
1	Miranda	0.075	4.445 190 550	0.000 959 619	−0.000 970 433
2	Ariel	1.49	2.492 952 519	0.000 297 058	−0.000 300 492
3	Umbriel	1.45	1.516 148 111	0.000 136 919	−0.000 135 505
4	Titania	3.97	0.721 718 509	0.000 099 278	−0.000 088 051
5	Obéron	3.45	0.466 692 120	0.000 018 449	−0.000 012 387

Éléments orbitaux de Miranda

$$n = 4.443\,522\,67 - 0.000\,136\,65 \cos[(2N_1 - 2N_2)T + 5.894\,177]\,;$$
$$L = -0.238\,051\,58 + 4.445\,190\,55\; T + 0.025\,472\,17 \sin[\nu T + 1.321\,800]$$
$$-0.003\,088\,31 \sin[2\nu T + 2.643\,601] - 0.000\,318\,10 \sin[3\nu T + 3.965\,401];$$
$$z = 0.001\,312\,38\; \exp\sqrt{-1}\,[E_1 T + 0.611\,392] - 0.000\,123\,31\; \exp\sqrt{-1}\,[(-N_1 + 2N_2)T + 0.150\,958]$$
$$+0.000\,194\,10\; \exp\sqrt{-1}\,[N_1 T + 6.045\,134]\,;$$
$$\zeta = 0.037\,871\,71\; \exp\sqrt{-1}\,[I_1 T + 5.702\,313].$$

Éléments orbitaux d'Ariel

$$n = 2.492\,542\,57\,;$$
$$L = 3.098\,046\,41 + 2.492\,952\,52\; T - 0.001\,860\,50 \sin[\nu T + 1.321\,800]$$
$$+0.000\,219\,99 \sin[2\nu T + 2.643\,601]\,;$$
$$z = 0.001\,187\,63\; \exp\sqrt{-1}\,[E_2 T + 2.408\,974] + 0.000\,861\,59\; \exp\sqrt{-1}\,[E_3 T + 2.067\,774];$$
$$\zeta = 0.000\,358\,25\; \exp\sqrt{-1}\,[I_2 T + 0.395\,757] + 0.000\,290\,08\; \exp\sqrt{-1}\,[I_3 T + 0.589\,326].$$

Éléments orbitaux d'Umbriel

$$n = 1.515\,954\,90\,;$$
$$L = 2.285\,401\,69 + 1.516\,148\,11\; T + 0.000\,660\,57 \sin[\nu T + 1.321\,800]\,;$$
$$z = -0.000\,227\,95\; \exp\sqrt{-1}[E_2 T + 2.408\,974] + 0.003\,904\,69\; \exp\sqrt{-1}\,[E_3 T + 2.067774]$$
$$+0.000\,309\,17\; \exp\sqrt{-1}\,[E_4 T + 0.735\,131] + 0.000\,221\,92\; \exp\sqrt{-1}\,[E_5 T + 0.426\,767]\,;$$
$$\zeta = 0.001\,113\,36\; \exp\sqrt{-1}\,[I_3 T + 0.589\,326] + 0.000\,350\,14\; \exp\sqrt{-1}\,[I_4 T + 1.746\,237].$$

Éléments orbitaux de Titania

$$n = 0.721\,663\,16\,;$$
$$L = 0.856\,358\,79 + 0.721\,718\,51\; T\,;$$
$$z = 0.000\,932\,81\; \exp\sqrt{-1}\,[E_4 T + 0.735\,131] + 0.001\,120\,89\; \exp\sqrt{-1}\,[E_5 T + 0.426\,767]$$
$$+0.000\,793\,43\; \exp\sqrt{-1}\,[(-2N_4 + 3N_5)T + 1.823\,691]\,;$$
$$\zeta = 0.000\,685\,72\; \exp\sqrt{-1}\,[I_4 T + 1.746\,237] + 0.000\,378\,32\; \exp\sqrt{-1}\,[I_5 T + 4.206\,896].$$

Éléments orbitaux d'Obéron

$n = 0.466\,580\,54$;
$L = -0.915\,591\,80 + 0.466\,692\,12\ T$;
$z = -0.000\,758\,68\ \exp\sqrt{-1}\,[E_4T + 0.735\,131] + 0.001\,397\,34\ \exp\sqrt{-1}\,[E_5T + 0.426\,767]$
$\quad -0.000\,987\,26\ \exp\sqrt{-1}\,[(-2N_4 + 3N_5)T + 1.823\,691]$;
$\zeta = -0.000\,596\,33\ \exp\sqrt{-1}\,[I_4T + 1.746\,237] + 0.000\,451\,69\ \exp\sqrt{-1}\,[I_5T + 4.206\,896]$.

8.7.4. Éphéméride des cinq satellites principaux

La configuration du plan d'Uranus et d'un de ses satellites par rapport à l'écliptique et à l'équateur céleste est illustrée sur la figure 8.7.1.

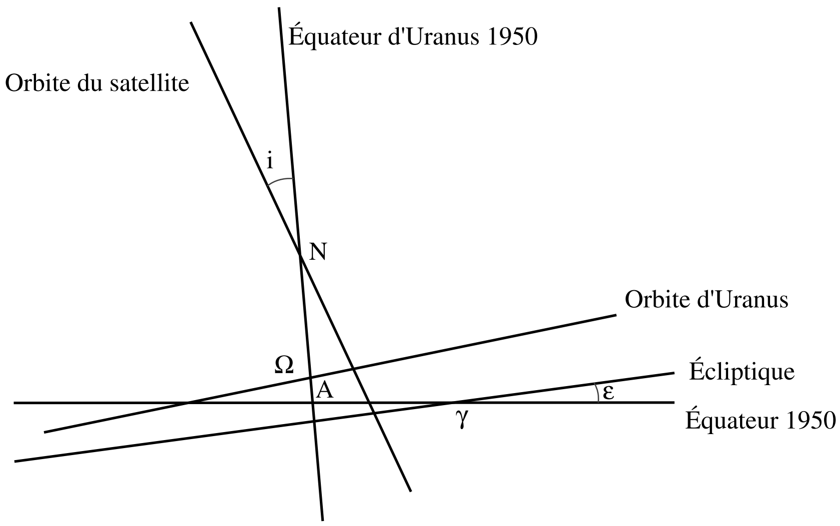

Fig. 8.7.1. Configuration du plan d'Uranus et d'un de ses satellites.

Le repère UME50* évoqué au paragraphe 8.7.3 est défini par l'équateur d'Uranus pour 1950 ; l'origine des axes est fixée en A, nœud ascendant de l'équateur céleste 1950.0 sur l'équateur d'Uranus pour 1950. EME50 est le référentiel défini par l'équateur céleste moyen 1950.0 et l'équinoxe γ pour cette date. Le passage des coordonnées dans le système UME50* à celles dans EME50 s'effectue à l'aide de la matrice de rotation R :

$$R = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha\sin\delta & \cos\alpha\cos\delta \\ -\cos\alpha & \sin\alpha\sin\delta & \sin\alpha\cos\delta \\ 0 & -\cos\delta & \sin\delta \end{bmatrix}$$

et la transformation s'écrit :

$$X_{EME50} = RX_{UME50^*}$$

α et δ dans l'expression de R sont les coordonnées équatoriales du pôle sud d'Uranus dans le repère EME50. Les valeurs adoptées par Laskar et Jacobson (1987) sont :

$$\alpha = 76°.6067$$

$$\delta = 15°.0322.$$

Elles sont issues de French et al. (1986), et diffèrent légèrement des valeurs que l'on obtiendrait à partir des données du chapitre 10.

L'évaluation de l'éphéméride du satellite découle des expressions du paragraphe précédent. À l'aide des formules du problème des deux corps, on construit les coordonnées rectangulaires uranocentriques du satellite (ou coordonnées différentielles par rapport au centre de la planète). La rotation précédente ramène ces coordonnées uranocentriques au repère EME50. En les ajoutant aux coordonnées rectangulaires géocentriques d'Uranus dans le repère EME50, on obtient finalement les coordonnées rectangulaires géocentriques du satellite dans le repère EME50 .

8.8. LES SATELLITES DE NEPTUNE

8.8.1. Brève présentation du système de Neptune

On connaît actuellement huit satellites dans le système de Neptune. Les premières observations de Triton (de magnitude 14), en 1846, suivirent de près la découverte de la planète, alors que Néréide (de magnitude 19) fut observé pour la première fois en 1949. Ces deux satellites présentent des caractéristiques dynamiques intéressantes car atypiques dans le système solaire. Triton est un satellite massif gravitant sur une orbite quasi-circulaire, rétrograde et fortement inclinée sur l'équateur de Neptune (inclinaison de l'ordre de 160°), alors que Néréide, bien plus petit (le troisième en taille parmi les satellites de Neptune), gravite sur l'orbite la plus excentrée parmi les satellites connus du système solaire (excentricité de l'ordre de 0.75).

Les six autres satellites ont été découverts lors du passage de la sonde Voyager-2 entre juin et août 1989, en même temps que quatre anneaux (Stone et Miner, 1989).

L'anneau le plus proche de la planète, 1989N3R, est large et diffus. Il s'étend entre 1.5 et 2 rayons planétaires (r) et présente vers 1.69 r une bande plus concentrée, large d'environ 1700 km. Vient ensuite, vers 2.15 r, un anneau étroit, 1989N2R, qui délimite la partie diffuse de l'anneau suivant, 1989N4R, large, s'étendant entre 2.15 r et 2.4 r et possédant une bande plus concentrée vers l'extérieur. Enfin, 1989N1R, à environ 2.54 r, est un anneau étroit (de l'ordre de 15 km) présentant trois zones de concentration importante de matière dont la persistance au cours du temps reste une question ouverte. Quant aux satellites, ils gravitent sur des orbites quasi-circulaires, à peu près dans le plan équatorial de Neptune. Deux d'entre eux, Protée (1989N1) et Larissa (1989N2), sont

Table 8.8.1. Paramètres du système de Neptune.

Paramètre	Valeur	Unité
GM du système de Neptune	$6\,836\,535. \pm 15.$	km^3/s^2
GM de Triton	$1\,427.9 \pm 3.5$	km^3/s^2
GM de Néréide [a]	0.	km^3/s^2
GM du corps fictif [b]	132 883 680 731.	km^3/s^2
J_2 de Neptune	$(3\,410. \pm 9.) \times 10^{-6}$	
J_4 de Neptune	$(-35. \pm 10.) \times 10^{-6}$	
Rayon de Neptune [a]	25 225.	km
Rayon de Triton [a]	$1\,350. \pm 7.$	km
Ascension droite du pôle de Neptune [1]	298.86 ± 0.15	deg
Déclinaison du pôle de Neptune [1]	42.81 ± 0.05	deg
Ascension droite de l'axe de précession	298.95 ± 0.15	deg
Déclinaison de l'axe de précession	43.31 ± 0.10	deg
Vitesse de précession	52.32 ± 0.25	deg/siècle
Période de rotation de Neptune [a]	16.11 ± 0.02	h
Rapport des moments d'inertie de Neptune [a]	0.21 ± 0.01	

[1] à la date julienne 2 447 763.5, Temps des éphémérides (date de la rencontre avec Voyager)
[a] constantes adoptées par Voyager
[b] issu de DE130

extérieurs au système d'anneaux de la planète. Trois autres, Despina (1989N3), Thalassa (1989N5) et Naïade (1989N6), sont intérieurs à l'anneau 1989N2R. Le dernier, Galatée (1989N4), gravite entre les anneaux 1989N1R et 1989N2R. Parmi ces satellites, Protée a la particularité d'être plus gros que Néréide. La proximité de la planète et probablement ses propriétés de surface expliquent la difficulté de son observation depuis le sol et font qu'il n'a pu être découvert avant l'exploration spatiale du système de Neptune. En 1991, Colas et Buil (1992) ont cependant montré que sa détection depuis le sol était possible.

8.8.2. Triton et Néréide

8.8.2.1. Observations et modèles

Jusqu'en 1988, environ 3000 observations de Triton et 75 observations de Néréide ont permis de prédire le mouvement de ces deux satellites avec une précision suffisante pour les besoins d'éphémérides utilisées depuis la Terre. Ces prédictions s'avérèrent insuffisantes pour servir à la navigation de la sonde Voyager-2 depuis le Jet Propulsion Laboratory (JPL, Pasadena). Les modèles du mouvement de Triton, développés par Eichelberger et Newton (1926) puis Harris (1984) sont, par nature, cinématiques, ne dépendant pas de paramètres dynamiques comme par exemple la masse de Neptune. Ces auteurs utilisèrent une orbite inclinée, précessant à vitesse constante, légèrement excentrée dans le premier modèle, circulaire dans le second. Dans le cas de Néréide, des modèles furent développés par Rose (1974), utilisant une orbite keplérienne, puis par Mignard (1976, 1981),

Table 8.8.2. Éléments orbitaux planétocentriques moyens de Triton pour la date julienne 2 447 763.5 TE, rapportés au plan invariable Neptune-Triton (Jacobson et al., 1991).

Élément	Valeur	Unité
a	354 759.146	km
$e\sin(\omega - \Omega)$	$0.281\,348\,542 \times 10^{-5}$	
$e\cos(\omega - \Omega)$	$-0.154\,364\,851 \times 10^{-4}$	
$M + \omega - \Omega$	76.724 3689	deg
$\cot(i/2)\sin\Omega$	0.028 181 3825	
$\cot(i/2)\cos\Omega$	−0.203 010 3396	
$\dot{M} + \dot{\omega} - \dot{\Omega}$	61.257 2637	deg/jour
$\dot{\omega} - \dot{\Omega}$	0.382 463 540	deg/an
$\dot{\Omega}$	0.523 159 764	deg/an
Ascension droite du pôle du plan invariable	298.947 294	deg
Déclinaison du pôle du plan invariable	43.318 9060	deg
e	0.000 015 691	
$\omega - \Omega$	169.670 538	deg
i	156.834 472	deg
Ω	172.096 852	deg

Table 8.8.3. Éléments orbitaux barycentriques moyens de Néréide pour la date julienne 2 433 680.5 TE, rapportés au plan invariable Neptune-Néréide (Jacobson et al., 1991).

Élément	Valeur	Unité
a	5 513 413.256	km
$e\sin(\omega + \Omega)$	−0.724 953 400	
$e\cos(\omega + \Omega)$	−0.196 840 797	
$M + \omega + \Omega$	254.150 289	deg
$\tan(i/2)\sin\Omega$	−0.027 725 2165	
$\tan(i/2)\cos\Omega$	0.056 792 6008	
$\dot{M} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}$	0.999 624 080	deg/jour
$\dot{\omega} + \dot{\Omega}$	0.706 322 818	deg/siècle
$\dot{\Omega}$	−3.916 609 63	deg/siècle
Ascension droite du pôle du plan invariable	270.203 984	deg
Déclinaison du pôle du plan invariable	69.154 3762	deg
e	0.751 201 525	
$\omega + \Omega$	254.809 177	deg
i	7.232 429 19	deg
Ω	333.979 128	deg

incluant les perturbations solaires à longues périodes, et enfin par Veillet (1982) et Veillet et Bois (1988), ajustant la théorie de Mignard sur de nouvelles observations. Ce dernier modèle n'avait pas la précision requise de 100 km pour être utilisable en navigation optique. C'est donc par intégration numérique, ajustée sur les observations, que les dernières éphémérides ont été déterminées par le JPL (Jacobson, 1990). Le modèle numérique comprenait l'aplatissement de Neptune ainsi que les perturbations dues aux autres planètes et au Soleil. Ces perturbations furent représentées par un corps fictif, placé au barycentre du système solaire et ayant pour masse la somme des masses du Soleil et des planètes intérieures à Neptune. Le modèle pour le mouvement du pôle de Neptune, intervenant dans la perturbation due à l'aplatissement de la planète, était une précession uniforme autour du moment angulaire du système Neptune-Triton, ses caractéristiques (positions, dérive, ...) devant être ajustées aux observations. D'autres paramètres furent aussi laissés libres pour un ajustement aux observations (masse de Triton, masse et harmonique zonal J_2 de Neptune, ...), alors que Néréide était supposé de masse négligeable. L'effet de Triton sur Néréide fut bien entendu pris en compte.

Après le passage de Voyager-2, 361 nouvelles observations de Triton et 83 nouvelles observations de Néréide ont permis une redétermination de l'orbite de ces satellites, après reconstruction de la trajectoire de la sonde (Jacobson et al., 1991). Pour ces orbites, l'estimation des erreurs, dues principalement à une mauvaise connaissance de la période de révolution, est de l'ordre de 100 et 1850 kilomètres par an (le long de l'orbite) pour Triton et Néréide respectivement. Un modèle de l'orbite de Néréide incluant les perturbations solaires complètes au deuxième ordre et la perturbation due à Triton fut simultanément développé (Oberti, 1990b), mais n'est pas encore ajusté aux observations.

8.8.2.2. Éléments orbitaux

Paramètres de l'intégration numérique

Afin de rendre utilisables les éphémérides numériques, le JPL a ajusté sur ces dernières une orbite précessante pour chaque satellite (Jacobson et al., 1991). Les valeurs arrondies des paramètres utilisés ou déterminés par l'intégration numérique de Jacobson et al. (1991) sont données dans la table 8.8.1. Les ascensions droites et les déclinaisons figurant dans cette table sont rapportées à l'équinoxe moyen B1950.

Éléments orbitaux moyens

Les tables 8.8.2 et 8.8.3 donnent les éléments orbitaux moyens de Triton et Néréide, respectivement, issus de Jacobson et al. (1991). Les éléments orbitaux de Triton sont planétocentriques et donnés pour la date julienne 2 447 763.5, Temps des éphémérides. Ceux de Néréide sont barycentriques (barycentre Neptune-Triton) et donnés pour la date julienne 2 433 680.5, Temps des éphémérides. Pour chaque satellite (Fig. 8.8.1), le plan de référence est son plan invariable (plan où la précession de l'orbite est quasiment uniforme). Les longitudes sont mesurées à partir du nœud ascendant A du plan invariable sur l'équateur céleste moyen B1950 ; a est le demi-grand axe et e l'excentricité de l'orbite du satellite, i représente l'inclinaison de l'orbite sur le plan invariable, Ω la longitude du nœud du plan de l'orbite sur le plan invariable, ω l'argument du périastre et M l'anomalie moyenne du satellite. Sur la figure 8.8.1, N représente la position du nœud ascendant de l'orbite sur le plan de référence, P la position du périastre du satellite et S la position du satellite. Les indices 1 et 2 correspondent respectivement à Triton et Néréide.

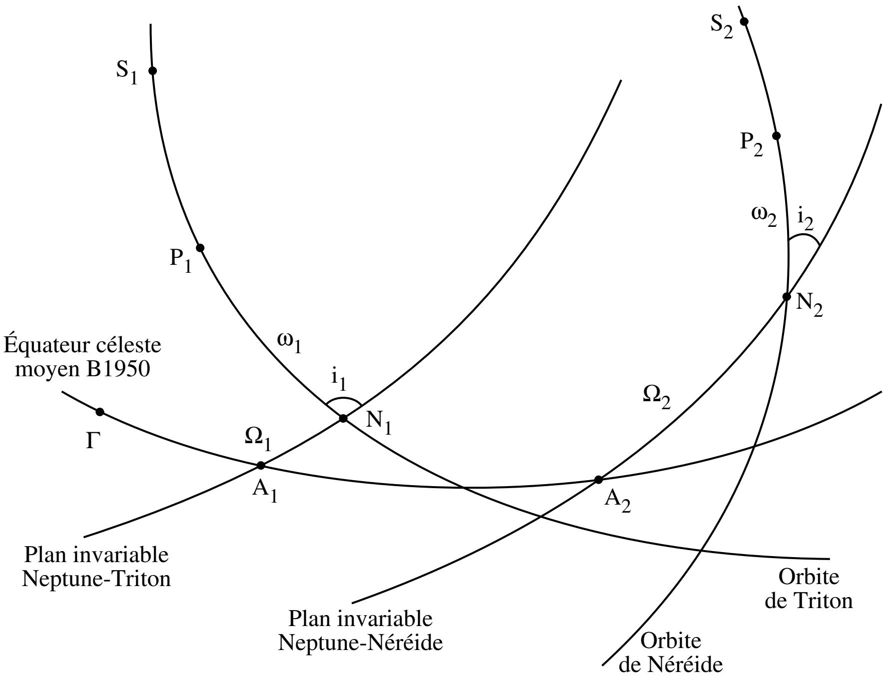

Fig. 8.8.1. Système de référence pour Triton et Néréide.

8.8.3. Les nouveaux satellites

8.8.3.1. Images et modèles

Les quatre premiers satellites furent découverts entre le 5 juin et le 6 août 1989 sur des images centrées sur Neptune, les deux autres sur des mosaïques servant à la recherche systématique d'anneaux ou de satellites, alors que la sonde se rapprochait toujours de la planète (Owen et al., 1991). Sur les 9000 images issues de la rencontre avec Neptune, 387 donnèrent 619 observations de ces nouveaux satellites.
Les modèles développés pour rendre compte de leur mouvement sont des orbites précessantes dont les éléments sont exprimés par rapport au plan de Laplace de chaque satellite (Owen et al., 1991). Ce plan est en fait une surface d'équilibre par rapport à laquelle l'inclinaison de l'orbite reste constante. Il doit son existence à la présence du satellite massif Triton sur son orbite rétrograde, et se situe entre l'équateur de Neptune et le plan orbital de Triton. Son inclinaison sur l'équateur de Neptune augmente avec le demi-grand axe du satellite et sa ligne des nœuds sur ce plan est

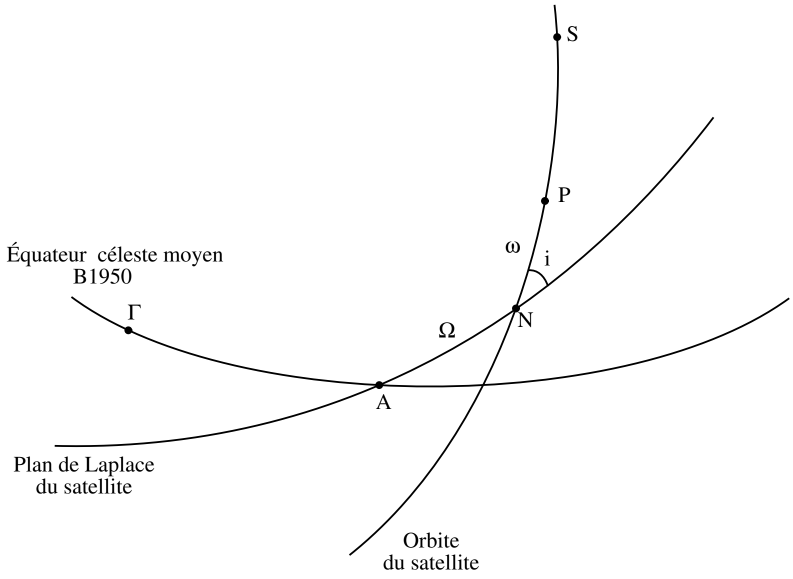

Fig. 8.8.2. Système de référence pour les six nouveaux satellites.

Table 8.8.4. Éléments orbitaux planétocentriques moyens de Protée, Larissa et Despina pour la date julienne 2 447 757.0 TE, rapportés au plan de Laplace (Owen et al., 1991).

Élément	Protée	Larissa	Despina	Unité
Inclinaison du plan de Laplace sur l'équateur de Neptune	0.5475	0.0479	0.0084	deg
Ascension droite du pôle du plan de Laplace	298.7578	298.8487	298.8559	deg
Déclinaison du pôle du plan de Laplace	42.2692	42.7643	42.8035	deg
a mesuré	$117\,635.0 \pm 16.8$	$73\,545.7 \pm 6.9$	$52\,531.3 \pm 8.5$	km
a calculé	$117\,647.11 \pm 0.23$	$73\,548.33 \pm 0.14$	$52\,525.95 \pm 0.10$	km
e ($\times 10^3$)	0.438 ± 0.107	1.386 ± 0.088	0.139 ± 0.166	
$\omega + \Omega$	99.48 ± 7.42	149.92 ± 3.82	$126. \pm 64.$	deg
i	0.0392 ± 0.0083	0.2008 ± 0.0098	0.0655 ± 0.0153	deg
Ω	150.00 ± 12.47	10.00 ± 2.54	154.59 ± 11.26	deg
$M + \omega + \Omega$	213.6694 ± 0.0066	184.8281 ± 0.0093	85.2720 ± 0.0139	deg
$\dot{M} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}$	320.7654 ± 0.0009	649.0534 ± 0.0016	$1\,075.7342 \pm 0.0028$	deg/jour
$\dot{\omega} + \dot{\Omega}$	0.078 914	0.393 133	1.276 761	deg/jour
$\dot{\Omega}$	−0.077 334	−0.392 209	−1.274 866	deg/jour
Ascension droite du pôle du plan de l'orbite	298.7844	298.8960	298.8943	deg
Déclinaison du pôle du plan de l'orbite	42.3032	42.5665	42.8626	deg
Nombre d'observations	183	144	109	

la même que celle de l'orbite de Triton. Il précesse donc par rapport au plan invariable Neptune-Triton. Cette précession, très lente, est négligée dans les modèles. Pour chaque orbite, le demi-grand axe et le moyen mouvement sont supposés indépendants. Les vitesses de précession sont calculées, et non ajustées car la période d'observation est trop courte, en prenant en compte les perturbations dues à l'aplatissement de la planète et à la présence de Triton. L'orientation du plan de Laplace est également calculée.

8.8.3.2. Éléments orbitaux

La table 8.8.4 donne les éléments orbitaux des nouveaux satellites Protée (1989N1), Larissa (1989N2), Despina (1989N3) et la table 8.8.5 ceux des satellites Galatée (1989N4), Thalassa (1989N5) et Naïade (1989N6), issus de Owen et al. (1991). Ces éléments sont planétocentriques et donnés pour la date julienne 2 447 757.0, Temps des éphémérides. Pour chaque satellite (Fig. 8.8.2), le plan de référence est son plan de Laplace (plan où la précession de l'orbite est quasiment uniforme). Les longitudes sont mesurées à partir du nœud ascendant A du plan de Laplace sur l'équateur céleste moyen B1950 ; les éléments a, e, i, Ω, ω et M, ainsi que les positions N, P et S sur la figure 8.8.2, ont même signification que pour Triton et Néréide.

Table 8.8.5. Éléments orbitaux planétocentriques moyens de Galatée, Thalassa et Naïade pour la date julienne 2 447 757.0 TE, rapportés au plan de Laplace (Owen et al., 1991).

Élément	Galatée	Thalassa	Naïade	Unité
Inclinaison du plan de Laplace sur l'équateur de Neptune	0.0197	0.0066	0.0054	deg
Ascension droite du pôle du plan de Laplace	298.8539	298.8563	298.8565	deg
Déclinaison du pôle du plan de Laplace	42.7922	42.8053	42.8064	deg
a mesuré	$61\,945.1 \pm 15.2$	$50\,069.2 \pm 13.3$	$48\,233.1 \pm 16.4$	km
a calculé	$61\,952.67 \pm 0.13$	$50\,074.55 \pm 0.30$	$48\,227.30 \pm 0.36$	km
e ($\times 10^3$)	0.120 ± 0.149	0.156 ± 0.250	0.328 ± 0.353	
$\omega + \Omega$	$220. \pm 64.$	$46. \pm 85.$	$85. \pm 42.$	deg
i	0.0544 ± 0.0132	0.2054 ± 0.0217	4.7382 ± 0.0338	deg
Ω	112.2 ± 15.8	89.85 ± 7.70	48.66 ± 0.46	deg
$M + \omega + \Omega$	46.6443 ± 0.0111	239.7371 ± 0.0275	60.2604 ± 0.0418	deg
$\dot{M} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}$	839.6598 ± 0.0025	$1\,155.7556 \pm 0.0101$	$1\,222.8441 \pm 0.0138$	deg/jour
$\dot{\omega} + \dot{\Omega}$	0.715 961	1.509 866	1.699 098	deg/jour
$\dot{\Omega}$	−0.714 836	−1.507 575	−1.714 075	deg/jour
Ascension droite du pôle du plan de l'orbite	298.9226	299.1362	303.4720	deg
Déclinaison du pôle du plan de l'orbite	42.8127	42.8044	39.5813	deg
Nombre d'observations	107	46	30	

8.9. CHARON, SATELLITE DE PLUTON

8.9.1. Présentation du système Pluton-Charon

Bien que Pluton ait été découvert en 1930 par C.Tombaugh, ce n'est qu'en 1978 que Charon fut découvert (Christy et Harrington, 1978). Le système Pluton-Charon a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années. Il présente en effet un défi observationnel du fait de la très faible élongation maximale de Charon ($0''.9$) et de sa faible magnitude ($m=17$). De plus c'est la seule planète à ne pas avoir été visitée par une sonde spatiale. Les éléments orbitaux proviennent donc uniquement des observations terrestres et des observations par des satellites en orbite autour de la Terre.

De nombreux moyens observationnels modernes ont utilisé ce couple d'objets pour tester leur puissance. On a ainsi des observations faites par la méthode d'interférométrie des tavelures (Bonneau et Foy, 1980 ; Beletic et al., 1989) et par celle de l'optique adaptative. Cependant c'est l'observation des phénomènes mutuels de Charon et de Pluton qui a permis d'obtenir la meilleure précision sur la période orbitale, la longitude moyenne, le nœud ascendant et l'inclinaison de Charon. Ces phénomènes ont par ailleurs permis de déterminer certains paramètres physiques comme le diamètre et l'albédo de ces corps (Tholen et Buie, 1990). Enfin, des observations astrométriques aussi bien depuis le sol qu'avec le télescope spatial Hubble ont permis de préciser l'échelle du système qui était difficilement mesurable avec les phénomènes mutuels ; le demi-grand axe a ainsi été déterminé (Young et al., 1994).

Le système Pluton-Charon est supposé être un système dynamiquement évolué ; ce fait provient de la similitude entre la période orbitale de Charon de 6.387 46 jours $\pm$ 0.000 02 (Tholen et Tedesco, 1994) et celle de la courbe photométrique de Pluton de 6.387 26 jours $\pm$ 0.000 07 (Tholen et Buie, 1990). La rotation de Pluton est donc synchrone avec la vitesse orbitale de Charon, son axe de rotation est donc très probablement perpendiculaire au plan de l'orbite de Charon. L'excentricité de Charon est très difficile à mesurer et la prendre nulle ne change que peu de chose au niveau de son éphéméride.

La mesure de la position du centre de gravité du système et donc des demi-grands axes respectifs de Pluton et Charon a permis de calculer les masses et les densités de ces deux objets (Young et al., 1994). Le rapport des masses étant seulement de 6.4, on peut estimer ce système équivalent à une planète double. Le plan de l'orbite de Pluton étant très éloigné de celui de l'écliptique on peut penser que ce système fait partie de la bande de Kuiper. Les paramètres physiques de Triton et de Pluton étant très proches, ces objets ont sans doute la même origine. Triton aurait été capturé par Neptune alors que Pluton est resté en orbite autour du Soleil. Quant à Charon dont l'orbite est très inclinée sur le plan orbital de Pluton, il pourrait être le résultat d'une capture après le choc d'un astéroïde sur la planète. La table 8.9.1 donne les paramètres du système de Pluton, d'après Young et al. (1994).

Table 8.9.1. Paramètres du système de Pluton (Young et al., 1994).

GM système :	955.5 ± 8	$km^3\,s^{-2}$
GM Pluton :	826.1 ± 8	$km^3\,s^{-2}$
GM Charon :	129.4 ± 3	$km^3\,s^{-2}$
Rayon Pluton :	1195 ± 5	km
Rayon Charon :	588 ± 13	km
Période de rotation de Pluton :	$6.387\,26 \pm 0.000\,07$	jours
Albédo Pluton :	0.3	
Albédo Charon :	0.4	
Mag. Pluton :	15.1	
Mag. Charon :	16.8	
Dens. Pluton :	1.9	$kg\,m^{-3}$
Dens. Charon :	2	$kg\,m^{-3}$

8.9.2. Éléments orbitaux

En raison de la distance au Soleil du système Pluton-Charon et de la brièveté de la période des observations, il a été impossible d'utiliser un modèle plus raffiné que celui du problème des deux corps. Les éléments orbitaux de Charon sont donc donnés dans le système J2000 planétocentrique, ils sont issus de Young et al. (1994). Ils sont donnés, dans la table 8.9.2, pour le 19 juin 1986 à 0 h (DJ 2 446 600.5). M désigne l'anomalie moyenne de Charon, Ω, la longitude du nœud ascendant de son orbite sur l'équateur moyen J2000, ω, l'argument du périastre, i, l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'équateur moyen J2000.

Table 8.9.2. Éléments orbitaux de Charon pour le 19 juin 1986 à 0 h (DJ 2 446 600.5) d'après Young et al. (1994).

a	$19\,460 \pm 58$	km
e	0	
$M + \omega$	259.76 ± 0.08	deg
Ω	223.015 ± 0.028	deg
ω	210.0 ± 10.0	deg
i	95.00 ± 0.24	deg

8.10. LES COMÈTES

8.10.1. Historique

De tout temps les comètes ont frappé l'imagination des peuples par leurs brusques apparitions et leurs aspects. Souvent associées à de néfastes présages (guerres, cataclysmes, épidémies et morts des monarques), on retrouve leurs traces dans toutes les chroniques anciennes. Certaines de ces superstitions ont la vie longue, n'a-t-on pas rendu la comète de 1910 responsable des inondations de Paris!

Les comètes ont été longtemps considérées comme des météores atmosphériques ; il faudra attendre le dernier quart du seizième siècle et l'étude de la parallaxe diurne de la comète de 1577 par Tycho Brahé pour qu'elles soient considérées commes des astres véritables. C'est Edmund Halley qui, le premier, remarqua que les comètes de 1531, 1607 et 1682 avaient des éléments orbitaux pratiquement identiques et devaient être une seule et même comète dont il prédit la réapparition pour l'an 1758. Le problème du calcul des perturbations de l'orbite de cette comète par les grosses planètes Jupiter et Saturne fut résolu par Clairaut. La comète fut effectivement observée à la fin de l'année 1758 et passa à son périhélie le 19 mars 1759, soit 33 jours avant la date prévue par le calcul. Ce fut néanmoins un triomphe de la mécanique céleste. Entre la fin du dix-huitième siècle et le milieu du dix-neuvième siècle on calcula ainsi les orbites de trois comètes : les comètes Encke, Biela et Faye. S'il est assez facile d'estimer l'orbite d'une comète lors d'un passage, une conique en donnant une bonne approximation, il est beaucoup plus difficile de prévoir une éphéméride de redécouverte tenant compte des perturbations planétaires. Cela restera un calcul long et laborieux jusqu'à l'utilisation des méthodes d'intégration numérique sur ordinateur.

La table 8.10.1 donne une idée des améliorations de la précision des calculs pour la détermination de l'instant du passage au périhélie de la comète de Halley, au cours de ses quatre derniers passages.

8.10.2. Origine et évolution

L'étude de la distribution de l'inverse des demi-grands axes des orbites d'une vingtaine de comètes à longue période entre 0 et 5×10^{-5} ua^{-1} a permis à Oort (1950) de conclure que les comètes provenaient d'un nuage situé à une distance du Soleil comprise entre 2×10^4 et 10^5 ua et comprenant environ 10^{12} comètes. Les comètes quittent le nuage de Oort et s'approchent du Soleil sous l'action des forces gravitationnelles des étoiles proches. Une partie des orbites de ces comètes est modifiée par les forces gravitationnelles planétaires et donne naissance aux comètes à courte période. Les travaux de Marsden et Sekanima (1978) sur 200 comètes semblent confirmer cette hypothèse. Fernández (1980), puis Duncan, Quinn et Tremaine (1988) reprennent une autre hypothèse émise par Kuiper (1951). Les comètes seraient issues d'un disque formé par des planétoïdes (astéroïdes ou noyaux cométaires), la ceinture de Kuiper, située au voisinage de l'écliptique, après l'orbite de Neptune, entre 45 et 50 ua. Une partie des planétoïdes, sous l'action des grosses planètes aurait

Table 8.10.1. Évolution de la précision du calcul du passage au périhélie de la comète de Halley.

Passage de	Instant du passage observé moins instant du passage calculé	Auteur(s) des prédictions	Perturbations prises en compte
1759	−33 jours	Lalande et Mme H. Lepaute	Jupiter, Saturne
1835	+ 3 jours	Pontécoulant	Jupiter, Saturne, Uranus
1910	− 2 jours	Crommelin	Jupiter, Saturne, Uranus
1986	quelques minutes (*)	Yeomans	Toutes les planètes et les forces non gravitationnnelles

(∗) Plusieurs orbites ont été calculées (Yeomans, 1977), la comète de Halley a été retrouvée en 1982 à 8″ de sa position estimée.

été éjectée vers le nuage de Oort, d'autres alimenteraient directement les comètes de la famille de Jupiter. Cette ceinture comprendrait environ 1.5×10^9 comètes, chacune ayant une masse de l'ordre de 6.4×10^{-12} masse solaire (Weissman, 1990). La masse de la ceinture est estimée à 0.01 masse solaire. Cette ceinture contiendrait des objets de type Pluton (Pluton, Charon, Triton) (Stern, 1991). La découverte et l'observation d'objets nouveaux tels 2060 Chiron, 5145 Pholus ou 1992 QB1 permettront peut-être d'accréditer cette nouvelle hypothèse.

Une fois capturées par le système planétaire les comètes perdent de 0.1% à 1% de leur masse à chaque passage au périhélie. Certaines se brisent en plusieurs noyaux (P/Biela 1846 II en 1845, West 1976 VI en 1976 et P/Shoemaker-Levy 9 en 1993). D'autres ont une évolution plus catastrophique, chute sur le Soleil (Howard-Koomen-Michels en 1979) ou sur une planète (P/Shoemaker-Levy 9 sur Jupiter en juillet 1994). Les poussières éjectées par les noyaux forment les essaims météoritiques, anneaux de particules réparties le long de l'orbite des comètes.

8.10.3. Ancienne nomenclature des comètes

8.10.3.1. Le nom des comètes

La nomenclature des comètes est régie par l'Union Astronomique Internationale. Après confirmation de la découverte d'une nouvelle comète, on lui donne le nom ou les noms des personnes (au maximum trois) qui l'ont découverte, ou éventuellement le nom d'un satellite artificiel (comète IRAS) ou celui du lieu d'observation (comètes Tsuchinsan, ce qui signifie montagne pourpre en chinois). Ce nom est précédé des caractères P/ si la comète est périodique et si sa période est inférieure à 200 ans. Si un même observateur découvre plusieurs comètes, elles sont numérotées (comète Shoemaker-Levy 1, 2, 3 ...). Les anciennes comètes redécouvertes gardent leur ancien nom, mais parfois lorsqu'une comète n'a pas été observée pendant de nombreux passages, on lui ajoute le nom de l'observateur qui la redécouvre (comète P/Tuttle-Giacobini-Kresák).

8.10.3.2. Les références provisoires et définitives

Au moment de la découverte ou de la redécouverte d'une comète, on lui attribue une référence provisoire constituée par le millésime de l'année en cours suivi d'une lettre minuscule attribuée chronologiquement dans l'ordre alphabétique. Lorsque toutes les lettres de l'alphabet sont épuisées, ce qui se produit régulièrement depuis quelques années, on recommence à la lettre *a* suivie du chiffre 1 (1991*a*1, 1991*b*1 ...). Plus tard, cette référence est remplacée par une référence définitive constituée par le millésime de l'année du passage au périhélie de la comète, suivi d'un numéro en chiffres romains représentant l'ordre chronologique des passages au périhélie des comètes dans l'année considérée (1990 XXVII, vingt-septième comète passant au périhélie en 1990). Comme certaines comètes sont découvertes après leur passage au périhélie, les références définitives sont attribuées avec un an de retard. Ainsi les références des comètes pour l'année 1990 ont été publiées en janvier 1992 (MPC 19358). Ces nouvelles références sont publiées chaque début d'année dans les *Minor Planet Circulars/Minor Planets and Comets* (MPC).

8.10.3.3. Quelques exceptions

Certaines comètes ont reçu le nom de l'astronome qui, le premier, a calculé les éléments de leur orbite (comètes P/Halley, P/Encke, P/Lexell), la comète P/Pons-Coggia-Winnecke-Forbes a été rebaptisée P/Crommelin par une décision de l'Union Astronomique Internationale (1948). Les comètes anciennes, à l'exception de quelques comètes périodiques (P/Halley), ne possèdent pas de nom, mais seulement une référence définitive.

8.10.4. Nouvelle nomenclature des comètes

Depuis le premier janvier 1995, et suite aux recommandations de la commission 20 de l'UAI une nouvelle nomenclature des comètes est utilisée. Cette nomenclature s'inspire de la nomenclature utilisée pour les astéroïdes. Lorsqu'une nouvelle comète est observée elle reçoit comme référence annuelle le numéro de l'année en cours, suivi d'une lettre majuscule correspondant à la quinzaine du mois en cours. Chaque lettre successive de l'alphabet correspond chronologiquement à un demi-mois, ainsi la lettre A correspond à la première quinzaine de janvier, la lettre B à la deuxième quinzaine de janvier et ainsi de suite. Cette lettre est suivie d'un chiffre qui indique le numéro d'ordre de la découverte des comètes dans chaque quinzaine, ainsi la troisième comète découverte durant la deuxième quinzaine de janvier 1995 aurait pour référence 1995 B3. Cette référence est précédée des caractères P/ ou C/ selon que la comète est périodique ou non périodique. Pour les comètes scindées en plusieurs noyaux, la lettre correspondant à chaque noyau est placée après le numéro d'ordre, séparée de ce dernier par un tiret ; par exemple P/1994 P1-A, P/1994 P1-B. Les anciennes comètes périodiques, observées plus de trois fois, reçoivent une nouvelle référence définitive qui s'écrit sous la forme : xxxP/nom de la comète, xxx représente le numéro d'ordre de la comète, par exemple pour le troisième passage de la comète P/Wild4, on a : 1990 B1 = 116P/Wild 4 (*cf.* Table 8.10.2). Lorsqu'une comète est considérée comme disparue la lettre P est remplacée par la lettre D, par exemple la comète Biela a pour référence 3D/Biela. Les comètes périodiques redécouvertes ne reçoivent pas de numéro de référence annuelle.

Cette nouvelle méthode de nomenclature est plus simple que l'ancienne. La disparition de la référence en chiffres romains, et la numérotation définitive des comètes périodiques évitent une redondance des références pour les nouvelles comètes, mais l'obligation de conserver l'ancienne nomenclature pour les comètes antérieures à 1995, ne serait-ce que dans un but bibliographique, fait, hélas, perdre beaucoup d'intérêt à cette réforme. Ainsi, par exemple, durant les années 1993 et 1994, cinq comètes ont été découvertes par Mueller. Les anciennes références de ces comètes sont respectivement Mueller 1992 XX 1993d, Mueller 1993 XVIII 1994c, Mueller 1994 I 1993a, Mueller 1994 IX 1993p et P/Mueller 5 1994 XXV 1993s. Ces références deviennent dans la nouvelle nomenclature : Mueller C/1993 F1, Mueller C/1994 E1, Mueller C/1993 A1, Mueller C/1993 F1 et Mueller 5 P/1993 W1. Comme on le voit dans cet exemple la multiplicité des références augmente les risques d'erreur.

8.10.5. Observations des comètes

8.10.5.1. Problèmes liés à la physique des comètes

Les comètes sont formées d'un noyau de quelques kilomètres de diamètre, en rotation sur lui-même. La composition de ce noyau a été décrite par Whipple (1950), comme une *boule de neige sale*. Loin du Soleil son faible éclat rend les comètes quasiment inobservables. À l'approche du Soleil, sous l'action de la chaleur et du flux solaire, la glace à la surface du noyau se sublime et produit la *chevelure* ou *coma*. Cette coma accroît la luminosité de la comète, mais rend son aspect diffus, ce qui n'est pas favorable à de bonnes observations astrométriques. De plus, en fonction de l'activité de la comète, des queues de deux types peuvent apparaître. Les queues de type I, quasi-rectilignes, dans la direction opposée au Soleil, sont formées par le plasma provenant de l'ionisation du gaz par le flux ultraviolet solaire. Les queues de type II, plus larges, dans le plan de l'orbite, sont dues aux poussières éjectées du noyau, leurs formes, plus étendues, sont fonction de la taille des grains de poussière et de leur vitesse d'éjection. La présence de la coma et des queues rend plus délicate la mesure de la position du noyau. On mesure en général la position du photocentre de la coma, en sachant qu'il ne correspond pas nécessairement à la position du centre de masse.

Le fait que les comètes ne soient visibles qu'au voisinage de leur passage au périhélie, donne des séries d'observations très mal réparties sur les orbites. Cela entraîne des imprécisions dans la détermination des trajectoires et dans le raccordement des différents passages observés.

8.10.5.2. Nature des observations

Les observations sont publiées dans les télégrammes astronomiques de l'UAI au moment de la découverte ou de la redécouverte des comètes. Puis elles sont publiées dans les *Minor Planet Circulars*.

Les observations sont des mesures de position par rapport aux étoiles. Elles donnent des coordonnées astrométriques (*cf.* 4.2.1) directement reliées au repère du catalogue utilisé. Avant 1992 les observations topocentriques publiées étaient réduites dans le système de coordonnées équatoriales astrométriques lié au repère FK4 dont le plan de référence est l'équateur moyen B1950.0 (DJ 2 433 282.423) (*cf.* 4.2.2). À compter du premier janvier 1992, les observations topocentriques publiées sont réduites dans le système de coordonnées équatoriales astrométriques lié au repère FK5 dont le plan de référence est l'équateur moyen J2000 (DJ 2 451 545.0) (*cf.* 4.2.3).

Il convient de bien distinguer observations et éphémérides. Les observations sont liées aux catalogues et contiennent les erreurs de construction des catalogues. Les éphémérides sont le résultat de calculs effectués dans un repère de base qui est indépendant des catalogues d'étoiles.

La méthode idéale pour avoir les anciennes observations dans le repère lié au catalogue FK5 serait de réduire de nouveau ces observations, à l'aide des étoiles de ce catalogue, en utilisant les nouveaux formulaires de calcul. Elle n'est pas réalisable, vu le grand nombre d'observations. Le formulaire de passage d'un repère à l'autre, pour des observations astrométriques, doit tenir compte de trois corrections :

1. Les positions astrométriques des observations mesurées dans le repère FK4 sont affectées de l'aberration elliptique (termes dépendant de l'excentricité de l'orbite terrestre dans le calcul de l'aberration) contrairement à celles mesurées dans le repère FK5.
2. Les mouvements propres des étoiles du catalogue FK5 nécessaires pour déterminer la position des étoiles aux instants d'observation sont corrigés par rapport aux mouvements propres du catalogue FK4 de $1''.275$ par siècle, ainsi que d'autres quantités liées au changement de la constante de la précession, constante UAI 1976 pour le FK5, constante de Newcomb pour le FK4.
3. L'équinoxe du repère FK5 est décalé par rapport à l'équinoxe FK4 de $0''.525$.

Le formulaire suivant, proposé en 1990 à la commission 20 de l'UAI, tient compte de toutes ces corrections, les notations sont celles de Murray (1989). La méthode à utiliser pour transformer des observations astrométriques du repère FK4 au repère FK5 est la suivante :

Soient α_0 et δ_0 l'ascension droite et la déclinaison astrométriques d'une observation dans le repère FK4, et soient α et δ son ascension droite et sa déclinaison astrométriques dans le repère FK5.

– On calcule $\mathbf{r_0}$, le vecteur position de l'objet en coordonnées rectangulaires FK4 :

$$\mathbf{r_0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 \cos\delta_0 \\ \sin\alpha_0 \cos\delta_0 \\ \sin\delta_0 \end{pmatrix}.$$

– On retranche les termes négligés de l'aberration elliptique en calculant le vecteur $\mathbf{r_1}$ de la manière suivante. Soit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1.625\,57 \times 10^{-6} \\ -0.319\,19 \times 10^{-6} \\ -0.138\,43 \times 10^{-6} \end{pmatrix},$$

on a $\mathbf{r_1} = \mathbf{r_0} - \mathbf{A} + (\mathbf{r_0}.\mathbf{A})\mathbf{r_0}$ où $(\mathbf{r_0}.\mathbf{A})$ est le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{r_0}$ et $\mathbf{A}$.

– On calcule ensuite le vecteur $\mathbf{r}$ des coordonnées rectangulaires dans le repère FK5,

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

à partir du vecteur $\mathbf{r_1}$ et de la matrice M à l'aide du produit matriciel

$$\mathbf{r} = M\mathbf{r_1} \quad \text{où} \quad M = X + T\dot{X}.$$

T est le temps écoulé de l'époque B1950.0 à la date d'observation t, exprimé en siècles juliens :

$$T = \frac{(t - 2\,433\,282.423)}{36525}.$$

Les matrices X et $\dot{X}$ sont les suivantes :

$$X = \begin{pmatrix} +0.999\,925\,679\,495\,6877 & -0.011\,181\,483\,220\,4662 & -0.004\,859\,003\,815\,3592 \\ +0.011\,181\,483\,239\,1717 & +0.999\,937\,484\,893\,3135 & -0.000\,027\,162\,594\,7142 \\ +0.004\,859\,003\,772\,3143 & -0.000\,027\,170\,293\,7440 & +0.999\,988\,194\,602\,3742 \end{pmatrix},$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -0.002\,645\,5262 \times 10^{-6} & -1.153\,991\,8689 \times 10^{-6} & +2.111\,134\,6190 \times 10^{-6} \\ +1.154\,062\,8161 \times 10^{-6} & -0.012\,904\,2997 \times 10^{-6} & +0.023\,602\,1478 \times 10^{-6} \\ -2.111\,297\,9048 \times 10^{-6} & -0.005\,602\,4448 \times 10^{-6} & +0.010\,258\,7734 \times 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

La matrice X correspond au mouvement de précession de B1950.0 à J2000 et corrige de l'écart de $0''.525$ qui existe entre l'équinoxe du catalogue FK4 et l'équinoxe du catalogue FK5. La matrice $T\dot{X}$ introduit les corrections aux mouvements propres des étoiles du FK4 utilisées lors de la réduction des observations.

– Enfin on obtient les coordonnées α et δ en résolvant le système suivant :

$$\begin{aligned} \cos\delta\cos\alpha &= \frac{x}{r}, \\ \cos\delta\sin\alpha &= \frac{y}{r} \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \sin\delta &= \frac{z}{r}. \end{aligned}$$

8.10.6. Détermination des orbites

Lors de la découverte d'une nouvelle comète, il suffit de quelques observations, trois au minimum, pour déterminer une première orbite en utilisant, par exemple, les méthodes d'Olbers, de Gauss ou de Laplace (Danjon, 1953). Lorsque les observations sont plus nombreuses et réparties sur plusieurs semaines, on améliore l'orbite en la calculant à l'aide d'une intégration numérique tenant compte de l'ensemble des perturbations planétaires et en l'ajustant avec les observations par la méthode des moindres carrés. Pour les comètes périodiques, la précision des orbites calculées est fonction du nombre de passages observés. Ainsi les orbites ajustées sur un seul passage présentent souvent des écarts importants de positions (quelques minutes) au moment de la redécouverte au passage suivant.

8.10.6.1. Les méthodes d'intégration numérique

Comme tous les corps du système solaire, les comètes sont soumises à l'attraction gravitationnelle du Soleil et des autres planètes. Il n'est pas rare que leur trajectoire les fasse passer à des distances proches des planètes. Dans ce cas les orbites peuvent être très fortement modifiées. Les méthodes d'intégration numérique, outre une bonne stabilité numérique pour les intégrations sur de grandes périodes de temps, doivent avoir un bon comportement numérique au cours de ces passages proches. Au Bureau des longitudes (Rocher, *Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes* et *Notes cométaires du Bureau des longitudes*) nous utilisons la méthode de Gragg-Bulirsch-Stoer (Stoer et Bulirsch, 1980). C'est une méthode du type multi prédicteurs-correcteurs par extrapolation avec des fractions rationnelles. Le pas d'intégration, variable, peut être très grand (de l'ordre du seizième de la période) ce qui est particulièrement intéressant, au voisinage de l'aphélie, dans le cas des comètes à longue période.

8.10.6.2. Les perturbations

Les intégrations numériques se font en coordonnées rectangulaires équatoriales héliocentriques dans le repère défini par l'équateur et l'équinoxe moyens J2000. On tient compte de l'ensemble des perturbations des planètes du système solaire, les masses de ces planètes sont celles recommandées par l'UAI en 1976. Les éphémérides des planètes perturbatrices sont calculées, dans le repère équatorial J2000, à partir des théories développées au Bureau des longitudes.

Pour les comètes actives, si l'on désire relier entre eux plusieurs passages au périhélie, on doit tenir compte des forces produites par le dégazage du noyau. Ces forces sont appelées forces non gravitationnelles. La modélisation de ces forces se déduit du modèle de boule de neige sale proposé par Whipple (1950).

En tenant compte de l'ensemble des forces, les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \nabla R + \mathbf{N},$$

$\mathbf{r}(x, y, z)$ représente le vecteur position rectangulaire héliocentrique de la comète, r son module, le facteur k^2 représente le carré de la constante de Gauss. ∇ est l'opérateur gradient $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. R est la fonction perturbatrice due à l'ensemble des planètes du système solaire :

$$R = k^2 \sum_{i=1}^{9} m_i \left(\frac{1}{\mid \mathbf{r}_i - \mathbf{r} \mid} - \frac{\mathbf{r}_i . \mathbf{r}}{r_i^3} \right),$$

où $\mathbf{r}_i . \mathbf{r}$ représente le produit scalaire du vecteur $\mathbf{r}_i$, position héliocentrique de la ième planète, par le vecteur $\mathbf{r}$ et où m_i est la masse de la ième planète exprimée en masse solaire.

Le vecteur $\mathbf{N}$, qui correspond à la contribution des forces non gravitationnelles, a été introduit pour la première fois par Marsden (1969) sous la forme suivante :

$$\mathbf{N} = F_1 \frac{\mathbf{r}}{r} + F_2 \frac{\mathbf{h} \wedge \mathbf{r}}{hr} + F_3 \frac{\mathbf{h}}{h},$$

où $\mathbf{h} \wedge \mathbf{r}$ représente le produit vectoriel du vecteur moment angulaire de la comète ($\mathbf{h} = \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$) par le vecteur $\mathbf{r}$.

Les fonctions F_j sont de la forme :

$$F_j = A_j \alpha(\frac{r}{r'})^{-m} \big[1 + (\frac{r}{r'})^n\big]^{-k},$$

avec $m = 2.15$, $n = 5.093$, $k = 4.6142$, $r' = 2.808$ ua et avec le coefficent $\alpha = 0.111\,262$.

En général on prend le coefficient A_3 nul, ce qui traduit qu'il n'y a pas de force normale au plan de la trajectoire. A_1 et A_2 sont déterminés par ajustement sur les observations par la méthode des moindres carrés. Ces coefficients ne sont pas constants et un jeu de coefficients ne permet de relier entre-eux que quelques passages au périhélie. Lorqu'il devient impossible de relier plusieurs passages avec les mêmes coefficients, on en détermine de nouveaux après avoir supprimé le passage le plus ancien. Des modèles plus complexes de forces non gravitationnelles, tenant compte de l'axe de rotation du noyau ou de la dissymétrie de la diffusion de la comète par rapport au passage au périhélie (A_3 non nul), ont été élaborés pour des comètes particulières ; le principal problème qui s'oppose à une généralisation de l'utilisation de ces modèles plus complexes est le nombre insuffisant des observations pour permettre une bonne détermination de tous les paramètres. Le modèle classique est utilisé actuellement pour la construction des éphémérides.

8.10.7. Les éphémérides

Pour chaque comète et à chaque passage, on calcule pour une époque T proche du passage au périhélie les éléments osculateurs suivants rapportés à l'équateur et à l'écliptique moyens J2000 :

- l'instant du passage au périhélie τ,
- la distance du périhélie de l'orbite au Soleil en ua q,
- l'argument du périhélie en degré ω,
- la longitude du nœud ascendant en degré Ω,
- l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique en degré i,
- l'excentricité de l'orbite e,
- le moyen mouvement en degré par jour n,
- la période de révolution P.

On fournit parfois également les quantités P et Q définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
P_x &= \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i\\
P_y &= \cos\epsilon(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i) - \sin\epsilon\sin\omega\sin i\\
P_z &= \sin\epsilon(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i) + \cos\epsilon\sin\omega\sin i\\
Q_x &= -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i\\
Q_y &= \cos\epsilon(-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i) - \sin\epsilon\cos\omega\sin i\\
Q_z &= \sin\epsilon(-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i) + \cos\epsilon\cos\omega\sin i
\end{aligned}$$

où ϵ représente l'obliquité de l'écliptique pour l'époque J2000 ($\epsilon = 23°26'21''.448$).

Ces quantités peuvent être utilisées pour calculer les coordonnées rectangulaires équatoriales héliocentriques (x, y, z) de la comète en utilisant les formules du problème des deux corps. En effet on a :

$$\begin{aligned}
x &= P_x r \cos v + Q_x r \sin v, \\
y &= P_y r \cos v + Q_y r \sin v, \\
z &= P_z r \cos v + Q_z r \sin v, \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},
\end{aligned}$$

où v est l'anomalie vraie et r la distance héliocentrique, calculées à partir des éléments de l'orbite.

Sur une période de quelques semaines de part et d'autre de l'époque osculatrice, l'approximation qui consiste à utiliser le formulaire du problème des deux corps est relativement bonne, les écarts avec l'orbite réelle sont de l'ordre d'une dizaine de secondes d'arc. On passe des coordonnées héliocentriques ainsi calculées, aux coordonnées géocentriques équatoriales de la comète (α, δ, r) à l'aide des formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\xi &= x + X, \\
\eta &= y + Y, \\
\zeta &= z + Z,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \\
\tan \alpha &= \frac{\eta}{\xi}, \\
\tan \delta &= \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},
\end{aligned}$$

où X, Y et Z représentent les coordonnées géocentriques équatoriales rectangulaires du Soleil dans le repère J2000 et Δ la distance de la comète à la Terre. Si l'on veut garder une bonne précision dans le calcul de ces valeurs, il faut utiliser une éphéméride du Soleil ayant une précision de $0''.2$, par exemple celle produite par Chapront et Morando (1984) (le problème des deux corps est insuffisant). Si l'on désire avoir des coordonnées astrométriques pour un instant t, on calcule la position du Soleil $(X,\ Y,\ Z)$ à l'instant t et la position héliocentrique de la comète à l'instant $t - t'$, t' étant le temps de lumière Terre-comète.

Des éphémérides précises sont obtenues en utilisant, pour le calcul de la position de la comète, les résultats d'intégrations numériques et, pour le calcul des positions du Soleil, les éphémérides du Bureau des longitudes. On fournit, en général, les positions équatoriales géocentriques apparentes et les positions astrométriques J2000 de la comète, sa distance au Soleil r, sa distance à la Terre Δ, son élongation ainsi que la magnitude du noyau et la magnitude totale. D'autres éphémérides, destinées aux observateurs, donnent des éléments supplémentaires comme l'angle de phase, la distance angulaire comète-Lune, le jour de la Lune, la longueur apparente de la queue de type I et l'angle au pôle de sa direction.

8.10.7.1. Le calcul des magnitudes

L'évolution de la magnitude d'une comète est très difficile à estimer. On distingue deux types de magnitudes : la magnitude totale et la magnitude du noyau.

La magnitude totale concerne la lumière provenant de l'ensemble constitué par le noyau, la coma et les queues. Cette magnitude est celle de la comète lorsqu'elle est active. On la calcule à l'aide de la formule suivante :

$$m_1 = H_1 + 2.5k \log \Delta + 2.5n \log r.$$

H_1 est la magnitude absolue totale (celle de la comète pour $\Delta = 1$ ua et $r = 1$ ua). La valeur de k traduit la dépendance de la luminosité avec la distance à la Terre Δ, on prend en général $k = 2$. De même, le paramètre n traduit la dépendance de la luminosité avec la distance de la comète au Soleil r, on prend en général $n = 4$. Mais pour certaines comètes ces valeurs peuvent être différentes. Dans le cas de dissymétries par rapport au passage au périhélie (comètes P/Halley, P/Encke), on est obligé d'utiliser deux jeux de paramètres.

La magnitude du noyau représente la lumière réfléchie par le noyau. Elle dépend de la distance au Soleil, de la distance à la Terre et de l'angle de phase. C'est la magnitude de la comète loin du Soleil lorsqu'elle n'est pas encore active. On la calcule par la formule suivante :

$$m_2 = H_2 + 5 \log \Delta + 5 \log r + f(\beta).$$

H_2 est la magnitude absolue du noyau (celle du noyau pour $\Delta = 1$ ua et $r = 1$ ua). L'expression f est fonction de la phase β de la comète.

Il est toujours très difficile de prédire d'un passage à l'autre les magnitudes d'une comète. Pour la magnitude totale, il n'est pas rare d'avoir des erreurs de l'ordre de plusieurs magnitudes (2 à 3) entre les valeurs annoncées et observées.

8.10.7.2. Publications d'éphémérides et catalogues

Les éphémérides de redécouverte et les éléments des comètes sont publiés chaque année en France dans les *Éphémérides Astronomiques* du Bureau des longitudes et dans les *Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes* (Rocher, 1986 à 1993). Depuis 1995, les éléments des comètes, ainsi que les observations et les O-C (valeurs observées moins valeurs calculées) sont édités dans les *Notes cométaires du Bureau des longitudes* (Rocher, 1995). Ces notes sont disponibles sous la forme de fichiers Postscript sur le serveur ftp du Bureau des longitudes (ftp.bdl.fr). Des éphémérides similaires sont publiées annuellement dans le *Handbook of the British Astronomical Association*, dans les *Nakano Notes* (*Nakano wa Kangaeru noda*) et dans les *Minor Planet Circulars*. Parmi les catalogues de comètes il faut citer le catalogue des éléments orbitaux diffusé par le Minor Planet Center et régulièrement mis à jour. Pour les comètes anciennes on utilise le catalogue *Catalogue of ancient and naked-eye comets* publié par Hasegawa (1980).

8.10.7.3. Liste alphabétique des comètes

La table 8.10.2 donne la liste des comètes périodiques classées par ordre alphabétique. On y trouve, pour chaque comète périodique, le nom de la comète, son nouveau code dans la nouvelle nomenclature, sa période en années et le numéro de la *Note cométaire du Bureau des longitudes* qui contient la mise à jour des éléments osculateurs de la comète et les valeurs des O-C.

Table 8.10.2. Liste des comètes périodiques classées par ordre alphabétique.

Nom de la comète	Dénomination de la comète	Période (ans)	Numéro de la Note
Arend	50P	7.99	0120
Arend-Rigaux	49P	6.82	0085
Ashbrook-Jackson	47P	7.49	0020
Boethin	85P	11.23	0004
Borrelly	19P	6.89	0001
Bowell-Skiff	P/1983 C1	15.67	0121
Brewington	P/1992 Q1	10.72	0122
Brooks 2	16P	6.89	0011
Brorsen-Metcalf	23P	67.28	0123
Bus	87P	6.52	0088
Chernykh	101P	13.96	0070
Churyumov-Gerasimenko	67P	6.59	0029
Ciffréo	108P	7.23	0083
Clark	71P	5.50	0021
Comas Sola	32P	8.83	0030
Crommelin	27P	27.42	0124
Daniel	33P	7.06	0125
D'Arrest	6P	6.51	0022
De Vico	122P	74.33	0107
De Vico-Swift	54P	7.28	0126
Denning-Fujikawa	72P	9.01	0043
Du Toit-Hartley	79P	5.21	0058
Du Toit-Neujmin-Delporte	57P	6.39	0040
Elst-Pizarro	P/1996 N2	5.61	0156
Encke	2P	3.28	0014
Faye	4P	7.34	0127
Finlay	15P	6.76	0094
Forbes	37P	6.13	0095
Gale	34P	10.99	0128
Gehrels 1	90P	15.06	0129
Gehrels 2	78P	7.20	0033
Gehrels 3	83P	8.11	0090
Gehrels 4	P/1997 C1	17.10	0159
Giacobini-Zinner	21P	6.61	0013
Giclas	84P	6.96	0087
Grigg-Skjellerup	26P	5.11	0035
Gunn	65P	6.83	0031
Halley	1P	75.85	
Haneda-Campos	D/1978 R1	5.97	0034
Harrington (noyau A)	51P-A	6.78	0010

Table 8.10.2. (suite).

Nom de la comète	Dénomination de la comète	Période (ans)	Numéro de la Note
Harrington-Abell	52P	7.59	0130
Harrington-Wilson	D/1952 B1	6.35	0131
Hartley 1	100P	6.02	0056
Hartley 2	103P	6.27	0005
Hartley 3	110P	6.84	0075
Hartley-IRAS	P/1983 V1	21.46	0132
Helin	P/1987 Q3	14.45	0133
Helin-Lawrence	P/1993 K2	9.45	0069
Helin-Roman-Alu 1	117P	9.57	0055
Helin-Roman-Alu 2	P/1989 U1	8.20	0057
Helin-Roman-Crockett	111P	8.16	0049
Holmes	17P	7.09	0096
Holt-Olmstead	127P	6.34	0054
Honda-Mrkos-Pajdusakova	45P	5.27	0028
Howell	88P	5.58	0081
Iras	126P	13.29	0002
Jackson-Neujmin	58P	8.24	0007
Jedicke 1	P/1995 A1	14.34	0082
Jedicke 2	P/1996 A1	19.31	0151
Johnson	48P	6.97	0036
Kearns-Kwee	59P	8.96	0025
Klemola	68P	10.95	0023
Kobayashi	P/1997 B1	24.25	0158
Kohoutek	75P	6.67	0097
Kojima	70P	7.85	0079
Kopff	22P	6.45	0009
Kowal 1	99P	15.02	0091
Kowal 2	104P	6.39	0093
Kowal-Mrkos	D/1984 H1	7.32	0134
Kowal-Vavrova	P/1983 J3	15.94	0135
Kushida	P/1994 A1	7.37	0063
Kushida-Muramatsu	P/1993 X1	7.40	0062
Lagerkvist	P/1996 R2	7.36	0155
Levy	P/1991 L3	51.27	0136
Longmore	77P	6.98	0027
Lovas 1	93P	9.09	0137
Lovas 2	P/1986 W1	6.76	0138
Machholz 1	96P	5.24	0048
Machholz 2 (noyau A)	P/1994 P1-	5.23	0071
Machholz 2 (noyau B)	P/1994 P1-	5.23	0072

Table 8.10.2. (suite).

Nom de la comète	Dénomination de la comète	Période (ans)	Numéro de la Note
Machholz 2 (noyau C)	P/1994 P1-	5.37	0073
Machholz 2 (noyau D)	P/1994 P1-	5.23	0074
Maury	115P	8.74	0065
McNaught-Hartley	P/1994 N2	20.78	0067
McNaught-Hughes	P/1991 S1	6.71	0150
McNaught-Russell	P/1994 X1	18.24	0076
Metcalf-Brewington	97P	7.76	0006
Mrkos	124P	5.64	0050
Mueller 1	120P	8.41	0041
Mueller 2	P/1990 R1	6.56	0060
Mueller 3	P/1990 S1	8.65	0139
Mueller 4	P/1992 G3	8.97	0098
Mueller 5	P/1993 W1	13.78	0064
Neujmin 1	28P	18.21	0140
Neujmin 3	42P	10.63	0099
Parker-Hartley	119P	8.89	0044
Perrine-Mrkos	18P	6.77	0100
Pons-Winnecke	7P	6.37	0039
Reinmuth 1	30P	7.31	0012
Reinmuth 2	44P	6.64	0017
Russell 1	83P	7.62	0141
Russell 2	89P	7.38	0092
Russell 3	91P	7.49	0037
Russell 4	94P	6.58	0053
Sanguin	92P	12.50	0142
Schaumasse	24P	8.22	0101
Schuster	106P	7.26	0024
Schwassmann-Wachmann 1	29P	14.85	0015
Schwassmann-Wachmann 2	31P	6.39	0016
Schwassmann-Wachmann 3 (A)	73P-A	5.39	0152
Schwassmann-Wachmann 3 (B)	73P-B	5.35	0153
Schwassmann-Wachmann 3 (C)	73P-C	5.35	0154
Schwassmann-Wachmann 3	73P	5.34	0003
Shajn-Schaldach	61P	7.49	0102
Shoemaker 1	102P	7.25	0117
Shoemaker 2	D/1984 W1	7.89	0118
Shoemaker 3	P/1986 A1	16.91	0119
Shoemaker 4	P/1994 J3	14.53	0066
Shoemaker-Holt 1-A	128P-A	9.55	0059
Shoemaker-Holt 1-B	128P-B	9.55	0157

Table 8.10.2. (fin).

Nom de la comète	Dénomination de la comète	Période (ans)	Numéro de la Note
Shoemaker-Holt 2	121P	8.05	0046
Shoemaker-Levy 1	P/1990 V1	17.26	0111
Shoemaker-Levy 2		9.28	0112
Shoemaker-Levy 3	129P	7.25	0113
Shoemaker-Levy 4	118P	6.51	0052
Shoemaker-Levy 5	P/1991 T1	8.67	0114
Shoemaker-Levy 6	P/1991 V1	7.54	0115
Shoemaker-Levy 7	P/1991 V2	6.73	0116
Shoemaker-Levy 8	P/1992 G2	7.47	0103
Singer-Brewster	105P	6.43	0104
Slaughter-Burnham	56P	11.59	0078
Smirnova-Chernykh	74P	8.57	0086
Spacewatch	125P	5.56	0045
Spitaler	113P	7.10	0084
Stephan-Oterma	38P	37.70	0143
Swift-Gehrels	64P	9.21	0144
Swift-Tuttle	109P	134.6	0089
Takamizawa	98P	7.22	0145
Taylor	69P	6.97	0038
Tempel 1	9P	5.50	0018
Tempel 2	10P	5.48	0019
Tritton	95P	6.35	0051
Tsuchinshan 1	62P	6.65	0146
Tsuchinshan 2	60P	6.82	0147
Tuttle	8P	13.51	0105
Tuttle-Giacobini-Kresak	41P	5.46	0077
Urata-Niijima	112P	6.64	0106
Väisälä 1	40P	10.78	0108
Van Biesbroeck	53P	12.43	0148
West-Hartley	123P	7.59	0042
West-Kohoutek-Ikemura	76P	6.41	0080
Whipple	36P	8.53	0068
Wild 1	63P	13.26	0149
Wild 2	81P	6.39	0008
Wild 3	86P	6.91	0109
Wild 4	116P	6.16	0047
Wirtanen	46P	5.46	0032
Wiseman-Skiff	114P	6.53	0061
Wolf	14P	8.25	0110
Wolf-Harrington	43P	6.46	0026

8.11. LES ASTÉROÏDES

8.11.1. Historique

Les distances des planètes à l'orbite de Mercure ($a = 0.4$) sont entre elles, approximativement, comme les puissances entières successives de 2. Une valeur approchée du demi-grand axe de leurs orbites est donnée par la règle empirique énoncée au dix-huitième siècle par les astronomes Titius et Bode (1772) :

$$a = 0.4 + 0.3 \times 2^{n-1},$$

où a représente le demi-grand axe de l'orbite de la planète en ua et n le numéro de la planète compté à partir de Vénus ($n = 1$ pour Vénus, 2 pour la Terre, 3 pour Mars, 5 pour Jupiter, 6 pour Saturne, 7 pour Uranus). La lacune de cette règle pour $n = 4$ a incité les astronomes à rechercher des planètes entre Mars et Jupiter, de demi-grands axes voisins de 2.8.

Le premier janvier 1801, le sicilien Giuseppe Piazzi découvrit une planète qu'il nomma Cérès (divinité mythologique protectrice de la Sicile), dont les paramètres orbitaux correspondaient à la planète recherchée ($a = 2.768$) et dont la masse était bien inférieure à celle de Mercure. Trois nouvelles planètes seront rapidement découvertes, Pallas ($a = 2.772$) par Olbers le 28 mars 1802, Junon ($a = 2.671$) par Harding le 1 septembre 1804 et Vesta ($a = 2.362$) par Olbers le 29 mars 1807. La suivante, Astrée ne sera découverte qu'en 1845 par Encke. On en connaîtra 211 en 1879, dont 34 découvertes par l'astronome C.-H.F. Peters, et 512 en 1903. Le nombre de découvertes va croître rapidement avec l'évolution des méthodes d'observation et on comptera plus de 6700 astéroïdes numérotés fin 1995. Le faible taux de découvertes au début du dix-neuvième siècle était dû au manque de bonnes cartes d'étoiles. Les premières bonnes cartes zodiacales ont été produites par l'Académie de Berlin en 1830, puis par l'observatoire de Paris en 1854.

8.11.2. Origine et évolution

Il existe deux hypothèses contraires pour expliquer l'origine des astéroïdes. Dans la première, plus ancienne, une planète mère située sur une orbite comprise en Mars et Jupiter se serait fragmentée. Dans la seconde, une grande quantité de planètoïdes n'aurait pas pu se regrouper pour former une planète.

8.11.3. Nomenclature des astéroïdes

Lors de leur découverte, les astéroïdes, comme les comètes, reçoivent une dénomination provisoire formée par l'année de découverte suivie de deux lettres majuscules. La première désigne le demi-mois de la découverte, la seconde l'ordre chronologique de la découverte dans ce demi-mois.

Pour éviter toute confusion avec le chiffre 1, la lettre I n'est pas utilisée. Certains astéroïdes sont découverts sur les clichés effectués durant des campagnes systématiques d'observations (*survey*). On leur attribue alors comme dénomination provisoire le numéro de l'objet dans la campagne d'observations, suivi d'un code caractéristique de la campagne : P-L pour le *Palomar-Leiden survey de 1960*, T-1 pour le *First Trojan survey de 1971*, T-2 pour le *Second Trojan survey de 1973* et T-3 pour le *Third Trojan survey de 1977*. Lorsque la trajectoire de l'astéroïde est connue avec une assez bonne précision, généralement après plusieurs passages, on donne un numéro définitif à l'astéroïde. Ensuite un nom peut être proposé par le découvreur ou par un membre de la commission spécialisée de l'Union Astronomique Internationnale. Il est parfois difficile de distinguer une comète éteinte d'un astéroïde. Les erreurs de classification ne sont donc pas rares. On peut citer par exemple le cas de Tritton qui est passé du statut d'astéroïde à celui de comète.

8.11.4. Répartition orbitale des astéroïdes

Une grande partie des astéroïdes se situe dans la ceinture principale comprise entre 2 et 3.5 ua. La répartition des astéroïdes dans cette ceinture principale présente des discontinuités aux distances héliocentriques de 2.5 ua, 2.83 ua, 3 ua et 3.3 ua correspondant à des périodes de révolution de rapport 1/3, 2/5, 3/7 et 1/2 avec la période de révolution de Jupiter. Ces discontinuités, appelées lacunes de Kirkwood, correspondent à des zones d'instabilité. Après 3.5 ua on distingue deux groupes d'astéroïdes : les Hildas à 4 ua du Soleil et les Troyens sur l'orbite de Jupiter à 60° de part et d'autre de Jupiter. À ces familles d'astéroïdes s'ajoutent celles des astéroïdes à forte excentricité : les Amors qui coupent l'orbite de Mars et les Apollos qui coupent l'orbite de la Terre. Certains de ces derniers seraient des noyaux de comètes éteintes. L'amélioration des techniques d'observation a permis de découvrir de nouveaux corps situés après l'orbite de Saturne (trans-saturniens) les Centaures comme Chiron, Damoclès et Pholus, et même des corps situés après l'orbite de Neptune (trans-neptuniens) comme 1992 QB1 et 1993 FW.

8.11.5. Ajustement des orbites et production d'éphémérides

Vu le très grand nombre d'astéroïdes, l'ajustement des orbites et le calcul des éphémérides se font uniquement par des méthodes numériques. Ces méthodes, intégrations numériques et moindres carrés, sont similaires à celles utilisées pour l'étude des comètes.

La formule utilisée pour le calcul des magnitudes est la suivante :

$$m = 5\log(r\Delta) + H - 2.5\log[(1-G)\Phi_1 + G\Phi_2],$$

$$\text{où} \qquad \Phi_i = \exp\left\{-A_i[\tan(\frac{\beta}{2})]^{B_i}\right\} \text{pour } i = 1, 2,$$

$$\text{avec} \qquad A_1 = 3.33 \qquad A_2 = 1.87 \qquad B_1 = 0.63 \qquad B_2 = 1.22.$$

β est l'angle de phase, H est la magnitude absolue de l'astéroïde pour un angle de phase nul et G est appelé paramètre de pente.

Les éphémérides des astéroïdes sont éditées chaque année dans les *Éphémérides Astronomiques* du Bureau des longitudes et dans les *Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes*. Des travaux plus spécifiques, améliorations d'orbites et campagnes d'observations, sont effectués dans le cadre de missions spatiales (missions Hipparcos, ISO). De même des éphémérides de dernière minute sont calculées et diffusées pour la prévision et l'observation des occultations d'étoiles par des astéroïdes.

Les observations, les éléments, les noms et les éphémérides des nouveaux astéroïdes, ou leurs mises à jour, se trouvent dans les publications du Minor Planet Center : *Minor Planet Circulars* et *Minor Planet Electronic Circulars* et dans les télégrammes de l'Union Astronomique Internationale. Des catalogues d'éléments sont régulièrement publiés par le Minor Planet Center : *Catalogue of High-Precision Orbits of Minor Planets* (HPOMP), et par l'Institut d'Astronomie Théorique de Saint Petersbourg : *Efemeridy Malykh Planet* (EMP).

8.12. BIBLIOGRAPHIE

Adams, J.C. : 1853, On the secular variation of the Moon's mean motion, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **14**, 59.

Aksnes, K., Franklin, F.A. : 1978, The evidence for faint satellites of Saturn reexamined, *Icarus* **36**, 107.

Andoyer, H. : 1915, Sur le calcul des éphémérides des quatre anciens satellites de Jupiter, *Bull. Astron.* **32**, 177.

Arlot, J.-E. : 1982, New constants for Sampson-Lieske theory of the Galilean satellites of Jupiter *Astron. Astrophys.* **107**, 305.

Arlot, J.-E. : 1990, The mutual events of the Galilean satellites : predictions for the 1991 occurrence, *Astron. Astrophys.* **237**, 259.

Arlot, J.-E., Chapront, J., Ruatti, Ch., Vu, D.T. : 1986, Compact ephemerides of the main satellites of Jupiter, Saturn and Uranus, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **65**, 383.

Arlot, J.-E., Morando, B., Thuillot, W. : 1984, An analysis of recently rediscovered eclipses observations of the first satellite of Jupiter made between 1775 and 1802, *Astron. Astrophys.* **136**, 142.

Arlot, J.-E., Thuillot, W., Barroso Jr, J., Bergeal, L., Blanco, C., Boninsegna, R., Bouchet, P., Bourgeois, J., Briot, D., Bulder, H., Burchi, R., Cano, J.A., Colas, F., D'Ambrosio, V., Di Paolantonio, A., Dourneau, G., Dumont, M., Ferrand, S., Figer, A., Francou, G., Froeschlé, M., Gomez-Forellad, J.M., Gouiffes, C., Helmer, G., Jablonsky, F.J., Laques, P., Le Campion, J.-F., Lecacheux, J., Lecontel, J.-M., Manfroid, J., Meyer, C., Morando, B., Quast, G.R., Rémis, J., Renaudineau, J., Rouan, D., Ruatti, Ch., Sareyan, J.-P., Schmieder, F.-X., Sèvre, F., Souchay, J., Valtier, J.-C., Vu, D.T., Wahiche, J.-D. : 1992, A catalogue of the observations of the mutual phenomena of the Galilean satellites of Jupiter made in 1985 during the PHEMU85 Campaign, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **92**, 151.

Bec-Borsenberger, A., Rocher, P. : 1982, Comparaison aux observations et éphémérides de Phœbé, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **50**, 423.

Beletic, J.W., Goody, R.M., Tholen, D.J. : 1989, Orbital elements of Charon from speckle interferometry, *Icarus* **79**, 38.

Bigourdan, G. : 1932, Le Bureau des longitudes V^{e} partie, *Annuaire du Bureau des longitudes pour l'an 1932*, Gauthier-Villars, Paris.

Bonneau, D., Foy, R. : 1980, Interférométrie au 3.6m CFH. Résolution du système Pluton-Charon, *Astron. Astrophys.* **174**, 295.

Born, G.H., Duxbury, T.C. : 1975, The motion of Phobos and Deimos from Mariner 9 TV data, *Celest. Mech.* **12**, 77.

Bretagnon, P. : 1978, Sur une solution globale du mouvement des planètes, *Thèse d'état*, Paris.

Bretagnon, P. : 1980, Théorie au deuxième ordre des planètes inférieures, *Astron. Astrophys.* **84**, 329.

Bretagnon, P. : 1981, Construction d'une théorie des grosses planètes par une méthode itérative, *Astron. Astrophys.* **101**, 342.

Bretagnon, P. : 1982, Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP82, *Astron. Astrophys.* **114**, 278.

Bretagnon, P. : 1990, Méthode itérative de construction d'une théorie générale planétaire, *Astron. Astrophys.* **231**, 561.

Bretagnon, P., Francou, G. : 1988, Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solutions, *Astron. Astrophys.* **202**, 309.

Bretagnon, P., Simon, J.-L. : 1990, Théorie générale du couple Jupiter-Saturne par une méthode itérative, *Astron. Astrophys.* **234**, 287.

Brouwer, D., Clemence, G.M. : 1961, *Methods of celestial mechanics*, Academic Press, New-York.

Brown, E.W. : 1899a, Theory of the motion of the Moon, Part I, *Mem. Roy. Astron. Soc.* **53**, 39.

Brown, E.W. : 1899b, Theory of the motion of the Moon, Part II, *Mem. Roy. Astron. Soc.* **53**, 163.

Brown, E.W. : 1904, Theory of the motion of the Moon, Part III, *Mem. Roy. Astron. Soc.* **54**, 1.

Brown, E.W. : 1908a, Theory of the motion of the Moon, Part IV, *Mem. Roy. Astron. Soc.* **57**, 51.

Brown, E.W. : 1908b, Theory of the motion of the Moon, Part V, *Mem. Roy. Astron. Soc.* **59**, 1.

Brown, E.W. : 1911, On a new family of periodic orbits in the problem of three bodies, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **71**, 438.

Brown, E.W. : 1915, The elements of the Moon's orbit, *Mem. Roy. Astron. Soc.* **75**, 508.

Brown, E.W. : 1919, *Tables of the motion of the Moon*, Yale University Press, New-Haven.

Brumberg, V.A. : 1967, Développement de la fonction perturbatrice dans les problèmes de satellites, *Bull. Inst. astron. theor. de Leningrad* **11**, 125.

Brumberg, V.A. : 1972, *Mécanique céleste relativiste*, Nauka, Moscou.

Burckhardt, J.K. : 1812, Tables de la Lune, in *Tables astronomiques publiées par le Bureau des longitudes*, Paris.

Bureau des longitudes : 1986, Les étoiles, le système solaire, *Encyclopédie scientifique de l'univers*, vol. **II**, Gauthier-Villars, Paris, chap. 3.

Bureau des longitudes : 1997, Éphémérides des satellites faibles de Jupiter et de Saturne, *Supplément à la Connaissance des Temps*, Bureau des longitudes, Paris.

Bürg, J.T. : 1806, Tables de la Lune, in *Tables astronomiques publiées par le Bureau des longitudes*, Paris.

Burns, J.A., Matthews, M.S. (eds.) : 1986, *Satellites*, The University of Arizona Press, Tucson.

Burton, H.E. : 1929, Elements of the orbits of the satellites of Mars, *Astron. J.* **39**, 155.

Bykova, L.E., Shikhalev, V.V. : 1984, New orbital elements of Phœbe, the IX satellite of Saturn, *Celest. Mech.* **32**, 185.

Chapront, J. : 1970, Construction d'une théorie littérale planétaire jusqu'au second ordre des masses, *Astron. Astrophys.* **7**, 175.

Chapront, J. : 1995, Representation of planetary ephemerides by frequency analysis. Application to the five outer planets, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **109**, 181.

Chapront, J., Bretagnon, P., Mehl, M. : 1975, Un formulaire pour le calcul des perturbations d'ordres élevés dans les problèmes planétaires, *Celest. Mech.* **11**, 379.

Chapront, J., Morando, B. : 1984, Formulaire de calcul d'une éphéméride de petite planète ou de comète à partir de ses éléments osculateurs, Coordonnées rectangulaires du Soleil de 1950 à 2000, *Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes* **S003**, Paris.

Chapront, J., Vu, D.T. : 1984, A new compact representation of ephemerides : application to the motion of Pluto, the Sun and the Galilean satellites of Jupiter, *Astron. Astrophys.* **141**, 131.

Chapront-Touzé, M. : 1980, La solution ELP du problème central de la Lune, *Astron. Astrophys.* **83**, 86.

Chapront-Touzé, M. : 1983, Perturbations due to the shape of the Moon in the lunar theory ELP 2000, *Astron. Astrophys.* **119**, 256.

Chapront-Touzé, M. : 1988, ESAPHO : a semi-analytical theory for the orbital motion of Phobos, *Astron. Astrophys.* **200**, 255.

Chapront-Touzé, M. : 1990a, Phobos' physical libration and complements to the ESAPHO theory for the orbital motion of Phobos, *Astron. Astrophys.* **235**, 447.

Chapront-Touzé, M. : 1990b, Orbits of the Martian satellites from ESAPHO and ESADE theories, *Astron. Astrophys.* **240**, 159.

Chapront-Touzé, M. : 1994, Orbites des satellites de Mars en éléments de Struve, *Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes* **S049**, Paris.

Chapront-Touzé, M., Chapront, J. : 1983, The lunar ephemeris ELP 2000, *Astron. Astrophys.* **124**, 50.

Chapront-Touzé, M., Chapront, J. : 1988, ELP 2000-85 : a semi-analytical lunar ephemeris adequate for historical times, *Astron. Astrophys.* **190**, 342.

Christy, J.W., Harrington, R.S. : 1978, The satellite of Pluto, *Astron. J.* **83**, 1005.

Colas, F., Buil, C. : 1992, First Earth-based observations of Neptune's satellite Proteus, *Astron. Astrophys.* **262**, L13.

Cuzzi, J.N., Scargle, J.D. : 1985, Wavy edges suggest moonlet in Encke's gap, *Astrophys. J.* **292**, 276.

Danjon, A. : 1953, *Astronomie générale*, Sennac éd., Paris, réédité en 1980, Blanchard ed.

De Haerdtl, E. : 1892, Sur une inégalité du quatrième ordre provenant de l'action mutuelle des deux derniers satellites de Jupiter, *Bull. Astron.* **9**, 2121.

De Sitter, W. : 1918, Outlines of a new mathematical theory of Jupiter's satellites *Ann. Sterrew. Leiden* **12**.

De Sitter, W. : 1927, On the secular accelerations and the fluctuations of the longitudes of the Moon, the Sun, Mercury and Venus, *Bull. Astron. Inst. Netherlands* **4**, 21.

Delambre, J.-B. : 1806, Avertissement de la *Connaissance des Temps pour l'an 1808*, Bureau des longitudes, Paris.

Delaunay, Ch.-E. : 1860, Théorie du mouvement de la Lune. Premier volume, *Mém. Acad. sci. Inst. impérial* **28**.

Delaunay, Ch.-E. : 1862a, Mémoire sur l'inégalité lunaire à longue période due à l'action perturbatrice de Vénus et dépendant de l'argument $l + 16l' - 18l''$, in *Connaissance des Temps pour l'an 1862*, Additions, Bureau des longitudes, Paris, 3.

Delaunay, Ch.-E. : 1862b, Calcul de l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune d'après la méthode de Poisson, in *Connaissance des Temps pour l'an 1862*, Additions, Bureau des longitudes, Paris, 59.

Delaunay, Ch.-E. : 1863, Mémoire sur l'inégalité lunaire à longue période due à l'action perturbatrice de Vénus et dépendant de l'argument $13l' - 8l''$, in *Connaissance des Temps pour l'an 1863, Additions*, Bureau des longitudes, Paris, 1.

Delaunay, Ch.-E. : 1867, Théorie du mouvement de la Lune. Deuxième volume, *Mém. Acad. sci. Inst. impérial* **29**.

Deprit, A., Henrard, J., Rom, A. : 1971, Analytical lunar ephemeris I. Definition of the main problem, *Astron. Astrophys.* **10**, 257.

Dermott, S.F., Murray, C.D. : 1981a, The dynamics of tadpole and horseshoe orbits. I. Theory, *Icarus* **48**, 1.

Dermott, S.F., Murray, C.D. : 1981b, The dynamics of tadpole and horseshoe orbits. II. The coorbital satellites of Saturn, *Icarus* **48**, 12.

Descamps, P. : 1992, Étude des effets de surface sur la réduction astrométrique des observations de phénomènes des satellites galiléens de Jupiter, *Thèse*, observatoire de Paris.

Descamps, P. : 1994, Astrometric analysis of Europa-Io occultations observed in 1991, *Astron. Astrophys.* **291**, 664.

Descamps, P., Arlot, J.-E., Thuillot, W., Colas, F., Vu, D.T., Bouchet, P., Hainaut, O. : 1992, Observations of the volcanoes of Io, Loki and Pele, made in 1991 at the ESO during an occultation by Europa, *Icarus* **100**, 235.

Dickey, J.O., Williams, J.G., Yoder, C.F. : 1982, Results from lunar laser ranging data analysis, in *High-precision Earth rotations and Earth-Moon dynamics*, O. Calame ed., Reidel, Dordrecht, 209.

Dollfus, A. : 1967, Un nouveau satellite de Saturne, *Compt. Rend. Acad. sci.* **264**, 822.

Dollfus, A. : 1968, La découverte du $10^{ème}$ satellite de Saturne, *L'Astronomie* **82**, 253.

Dourneau, G. : 1987, Observations et étude du mouvement des huit premiers satellites de Saturne, *Thèse d'état*, université Bordeaux I.

Dourneau, G. : 1993, Orbital elements of the eight major satellites of Saturn determined from a fit of their theories of motion to observations from 1886 to 1985, *Astron. Astrophys.* **267**, 292.

Duncan, M., Quinn, T., Tremaine, S. : 1988, The origin of short-period comets, *Astrophys. J. Lett.* **328**, L69.

Dunham, D.W. : 1971, The motion of the satellites of Uranus, *Thesis*, Yale.

Duriez, L. : 1978, Théorème de Poisson en variables héliocentriques, *Astron. Astrophys.* **68**, 199.

Duriez, L. : 1979, Approche d'une théorie générale planétaire en variables elliptiques héliocentriques, *Thèse d'état*, université de Lille.

Duriez, L., Vienne A. : 1991, A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn, I. Equations and method of resolution, *Astron. Astrophys.* **243**, 263.

Eckert, W.J., Jones, R., Clark, H.K. : 1954, Construction of the lunar ephemeris, in *Improved Lunar Ephemeris 1952-1959*, U.S. Government Printing Office, Washington, 283.

Eckert, W.J., Walker, M.J., Eckert, D. : 1966, Transformation of the lunar coordinates and orbital parameters, *Astron. J.* **71**, 314.

Eichelberger, W.S., Newton, A. : 1926, The orbits of Neptune's satellites and the pole of Neptune's equator, *Astron. Pap. Amer. Ephem.* **9**, 3, 275.

Emel'yanov, N.V., Nasonova, L.P. : 1989, Analytical theory of the motion of Phobos and analysis of perturbations, *Soviet Astron.* **33**, 441.

Fairhead, L., Arlot, J.-E., Thuillot, W. : 1986, An analysis of occultation observations of the Galilean satellites of Jupiter and comparison with theories, *Astron. Astrophys.* **169**, 360.

Fairhead, L., Arlot, J.-E., Jannot, Y., Thuillot, W. : 1987, A catalogue of occultation observations of the Galilean satellites of Jupiter, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **68**, 81.

Fernández, J. : 1980, On the existence of a comet belt behind Neptune, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **192**, 481.

Ferraz-Mello, S. : 1966, Recherches sur le mouvement des satellites galiléens de Jupiter, *Bull. Astron.* **3**, 1, 287.

Ferraz-Mello, S. : 1979, *Dynamics of the Galilean satellites : an introduction treatise*, Universidade de Sao Paulo.

Ferraz-Mello, S. : 1987, Orbital resonances amongst planetary satellites, in *Dynamics of the Solar System*, 10th European Regional Astronomy Meeting of the IAU, Prague, *Pub. of the Astron. Inst. of the Czechoslovak Acad. of Sci.*.

Ferrari, A.J., Sinclair, W.S., Sjogren, W.L., Williams, J.G., Yoder, C.F. : 1980, Geophysical parameters of the Earth-Moon system, *J. Geophys. Res.* **85**, 3939.

Fountain, J.W., Larson, S.M. : 1978, Saturn's ring and nearby faint satellites, *Icarus* **36**, 92.

Francou, G., Bergeal, L., Chapront, J., Morando, B. : 1983, Nouvelles éphémérides du Soleil, de la Lune et des planètes, *Astron. Astrophys.* **128**, 124.

French, R.G., Elliot, J.L., Levine, S.E. : 1986, Structure of the Uranian rings. II Ring orbits and widths, *Icarus* **67**, 134.

Gaillot, A. : 1904, Application intégrale de la méthode d'interpolation. Tables rectifiées du mouvement de Saturne, *Annales de l'observatoire de Paris*, vol. **24**, 1, Gauthier-Villars, Paris.

Gaillot, A. : 1910, Tables nouvelles des mouvements d'Uranus et de Neptune, *Annales de l'observatoire de Paris*, vol. **28**, 1, Gauthier-Villars, Paris.

Gaillot, A. : 1913, Tables rectifiées du mouvement de Jupiter, *Annales de l'observatoire de Paris*, vol. **31**, 1, Gauthier-Villars, Paris.

Goldstein, S.J., Jacobs, K.C. : 1986, The contraction of Io's orbit, *Astron. J.* **92**, 199.

Greenberg, R. : 1982, Orbital evolution of the Galilean satellites, in *Satellites of Jupiter*, D. Morrison ed., the University of Arizona Press, Tucson, 65.

Gutzwiller, M.C., Schmidt, D.T. : 1986, The motion of the Moon as computed by the method of Hill, Brown, and Eckert, *Astron. Pap. Amer. Ephem.* **13**, part. I.

Hansen, P.A. : 1857, *Tables de la Lune*, Imprimerie G.E. Eyre et G. Spottiswoode, Londres.

Harper, D., Taylor, D.B. : 1993, The orbits of the major satellites of Saturn, *Astron. Astrophys.* **268**, 326.

Harris, A.W. : 1984, Physical properties of Neptune and Triton inferred from the orbit of Triton, in *Uranus and Neptune*, NASA CP-2230, ed. J.T. Bergstralh, NASA, Washington, D.C., 357.

Hasegawa, I. : 1980, Catalogue of ancient and naked-eye comets, *Vistas in Astron.* **24**, 59.

Henrard, J. : 1973, L'éphéméride analytique lunaire ALE, *Ciel et Terre* **89**, 1.

Henrard, J. : 1979, A new solution to the main problem of the lunar theory, *Celest. Mech.* **19**, 337.

Henrard, J. : 1980, Perturbations due to the shape of the Moon in the lunar theory, *Celest. Mech.* **22**, 335.

Henrard, J. : 1981, The Earth-figure perturbations in the lunar theory, *Celest. Mech.* **25**, 417.

Hildebrand, C., Born, G.H., Duxbury, T.C. : 1979, The Deimos mass experiment : planning and preliminary results, in *Natural and artificial satellite motion*, P.E. Nacozy and S. Ferraz-Mello eds., University of Texas Press, 353.

Hill, G.W. : 1891, Determination of the inequalities of the Moon's motion which are produced by the figure of the Earth, *Astron. Pap. Amer. Ephem.* **3**, 201.

IERS : 1992, IERS standards (1992), *IERS Technical note* **13**, D.D. McCarthy ed., observatoire de Paris.

Iszak, I.G. : 1965, Analytical development of the planetary disturbing function on a digital computer, *Smithsonian Astrophys. Observ. Special Report* **164**.

Jacobson, R.A. : 1990, The orbits of the satellites of Neptune, *Astron. Astrophys.* **231**, 241.

Jacobson, R.A., Synnott, S.P., Campbell, J.K. : 1989, The orbits of the satellites of Mars from spacecraft and Earthbased observations, *Astron. Astrophys.* **225**, 548.

Jacobson, R.A., Riedel, J.E., Taylor, A.H. : 1991, The orbits of Triton and Nereid from spacecraft and Earthbased observations, *Astron. Astrophys.* **247**, 565.

Kinoshita, H. : 1982, Comparison of lunar ephemerides (SALE and ELP) with numerical integration, in *High-precision Earth rotations and Earth-Moon dynamics*, O. Calame ed., Reidel, Dordrecht, 245.

Klavetter, J.J. : 1989a, Rotation of Hyperion. I. Observations, *Astron. J.* **97**, 570.

Klavetter, J.J. : 1989b, Rotation of Hyperion. II. Dynamics, *Astron. J.* **98**, 1855.

Kozaï, Y. : 1957, Five inner satellites of Saturn, *Ann. Tokyo Obs.* **V**, 107.

Kozaï, Y. : 1976, Masses of satellites and oblateness parameters of Saturn, *Pub. of the Astron. Soc. of Japan* **28**, 675.

Kovalevsky, J. : 1963, *Introduction à la mécanique céleste*, Armand Colin, Paris.

Kubo, Y. : 1982, Perturbations by the oblateness of the Earth and by the planets in the motion of the Moon, *Celest. Mech.* **26**, 97.

Kuiper, G. : 1951, On the origin of the solar system, in *Astrophysics : a topical symposium*, J.A. Hynek ed., 357.

Lagrange, J.-L. : 1809, Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes, et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites, *Mémoires de l'Institut de France*, vol. **IX**, 1.

Lalande, J.-J. : 1771, *Astronomie*, 2^e éd., tome **I**.

Lalande, J.-J. : 1792, *Astronomie*, 3^e éd., tomes **I** et **II**, 179.

Laplace, P.-S. : 1785, Théorie de Jupiter et Saturne, *Mém. Acad. sci.*, réédité en 1898, Gauthier-Villars, Paris.

Laplace, P.-S. : 1788a, Sur l'équation séculaire de la Lune, *Mém. Acad. roy. sci.* **1786**, in *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1878 et suiv., tome **XI**, 243.

Laplace, P.-S. : 1788b, Théorie des satellites de Jupiter, *Mém. Acad. roy. sci.* **1788**, in *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1878 et suiv., tome **XI**, 309.

Laplace, P.-S. : 1796, Exposition du système du monde, réédité en 1984, *Corpus des œuvres de philosophie en langue française*, Fayard, Paris.

Laplace, P.-S. : 1799, Mémoire sur les équations séculaires des mouvements de la Lune, de son apogée et de ses nœuds, *Mém. Acad. sci.*, 1^e série, **2**, in *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1878 et suiv., tome **XII**, 191.

Laplace, P.-S. : 1800, *Traité de mécanique céleste*, tome **3**, réédité en 1873, Gauthier-Villars, Paris.

Laplace, P.-S. : 1825, Traité de mécanique céleste, livre XVI, in *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1878 et suiv., tome **V**, 403 et 407.

Larson, S.M., Fountain, J.W., Smith, B.A., Reitsema, H.J. : 1981, Observations of the Saturn E ring and a new satellite, *Icarus* **47**, 288.

Laskar, J. : 1985, Accurate methods in general planetary theory, *Astron. Astrophys.* **144**, 133.

Laskar, J. : 1986a, Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory, *Astron. Astrophys.* **157**, 59.

Laskar, J. : 1986b, A general theory for the Uranian satellites, *Astron. Astrophys.* **166**, 349.

Laskar, J. : 1988, Secular evolution of the solar system over 10 million years, *Astron. Astrophys.* **98**, 341.

Laskar, J. : 1990, The chaotic motion of the solar system : a numerical estimate of the size of the chaotic zones, *Icarus* **88**, 266.

Laskar, J., Jacobson, R.A. : 1987, GUST86. An analytical ephemeris of the Uranian satellites, *Astron. Astrophys.* **188**, 212.

Lazzaro, D., Ferraz-Mello, S., Veillet, Ch. : 1984, The Laplacian resonance amongst Uranian inner satellites, *Astron. Astrophys.* **140**, 33.

Le Verrier, U.-J. : 1855, Recherches astronomiques, *Annales de l'observatoire impérial de Paris*, vol. **1**, 1.

Le Verrier, U.-J. : 1856, Recherches astronomiques, *Annales de l'observatoire impérial de Paris*, vol. **2**, 1.

Le Verrier, U.-J. : 1858, Théorie et tables du mouvement apparent du Soleil, *Annales de l'observatoire de Paris*, vol. **4**, 1.

Le Verrier, U.-J. : 1859, Théorie et tables du mouvement de Mercure, *Annales de l'observatoire de Paris*, vol. **5**, 1.

Le Verrier, U.-J. : 1861a, Théorie et tables du mouvement de Vénus, *Annales de l'observatoire de Paris*, vol. **6**, 1.

Le Verrier, U.-J. : 1861b, Théorie et tables du mouvement de Mars, *Annales de l'observatoire de Paris*, vol. **6**, 185.

Le Verrier, U.-J. : 1874, Détermination des actions mutuelles de Jupiter et de Saturne, pour servir de base aux théories des deux planètes, *Annales de l'observatoire de Paris*, vol. **10**, 1.

Lecacheux, J., Laques, P., Vapillon, L., Auge, A., Despiau, R. : 1980, A new satellite of Saturn : Dione B, *Icarus* **43**, 111.

Lestrade, J.-F., Bretagnon, P. : 1982, Perturbations relativistes pour l'ensemble des planètes, *Astron. Astrophys.* **105**, 42.

Lestrade, J.-F., Chapront-Touzé, M. : 1982, Relativistic perturbations of the Moon in ELP 2000, *Astron. Astrophys.* **116**, 75.

Levallois, J.-J., Kovalevsky, J. : 1971, *Géodésie générale, géodésie spatiale*, tome **4**, Eyrolles, Paris.

Lieske, J.H. : 1973, On the 3-7 commensurability between Jupiter's outer two Galilean satellites, *Astron. Astrophys.* **27**, 59.

Lieske, J.H. : 1974, A method of revitalizing Sampson's theory, *Astron. Astrophys.* **31**, 137.

Lieske, J.H. : 1977, Theory of motion of Jupiter's Galilean satellites, *Astron. Astrophys.* **56**, 333.

Lieske, J.H. : 1978, Galilean satellites : analysis of photometric eclipses, *Astron. Astrophys.* **65**, 83.

Lieske, J.H. : 1980, Improved ephemerides of the Galilean satellites, *Astron. Astrophys.* **82**, 340.

Lieske, J.H. : 1986a, A collection of Galilean satellites eclipse observations, 1652-1983 : Part I, *Astron. Astrophys.* **154**, 61.

Lieske, J.H. : 1986b, A collection of Galilean satellites eclipse observations, 1652-1983 : Part II, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **63**, 143.

Lieske, J.H. : 1987, Galilean satellites evolution : observational evidence for secular changes in mean motions, *Astron. Astrophys.* **176**, 146.

Lissauer, J.J., Goldreich, P., Tremaine, S. : 1985, Evolution of the Janus-Epimetheus coorbital resonance due to torques from Saturn's rings, *Icarus* **64**, 425.

Marsden, B.G. : 1966, The motions of the Galilean satellites of Jupiter, *Ph. D. Thesis*, Yale University, New-Haven.

Marsden, B.G. : 1969, Comets and Nongravitational forces, *Astron. J.* **74**, 720.

Marsden, B.G., Sekanina, Z. : 1978, On the distribution of original orbits of comets of large perihelion distance, *Astron. J.* **83**, 63.

Mignard, F. : 1976, Satellite à forte excentricité. Application à Néréide, *Astron. Astrophys.* **43**, 359.

Mignard, F. : 1981, The mean elements of Nereid, *Astron. J.* **86**, 1728.

Morando, B. : 1987, Modèle de chute en magnitude au cours d'un phénomène mutuel des satellites galiléens de Jupiter, *Ann. Phys.* **12**, 139.

Morrison, D. (ed.) : 1982, *Satellites of Jupiter* , The University of Arizona Press, Tucson.

Mayer, T. : 1761, Tables de la Lune, in *Connaissance des Temps pour l'an 1761.*

Moons, M. : 1982, Physical libration of the Moon, *Celest. Mech.* **26**, 131.

Morley, T.A. : 1989, A catalogue of ground-based astrometric observations of the Martian satellites 1877 – 1982, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **77**, 209.

Morley, T.A. : 1990, An improved analytical model for the orbital motion of the Martian satellites, *Astron. Astrophys.* **228**, 260.

Murray, C.A. : 1989, The transformation of coordinates between the systems of B1950.0 and J2000.0 and the principal galactic axes referred to J2000.0, *Astron. Astrophys.* **218**, 325.

Newcomb, S. : 1878, *Researches on the motion of the Moon, part. I*, Government Printing Office, Washington, 268.

Newcomb, S. : 1898, Theory of the Sun, *Astron. Pap. Amer. Ephem.* **6**.

Newcomb, S. : 1909, Researches on the motion of the Moon, part. II, in *Astron. Pap. Amer. Ephem.* **9**, part. I.

Newhall, XX, Standish, E.M., Williams, J.G. : 1983, DE102 : a numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning fourty-four centuries, *Astron. Astrophys.* **125**, 150.

Null, G.W., Owen, M.W., Synnott, S.P. : 1993, Masses and densities of Pluto and Charon, *Astron. J.* **105**, 2319.

Oberti, P. : 1988, Satellites lagrangiens de Téthys et Dioné, réduction d'observations et théorie du mouvement, *Thèse*, observatoire de Paris.

Oberti, P. : 1990a, Lagrangian satellites of Tethys and Dione, *Astron. Astrophys.* **228**, 275.

Oberti, P. : 1990b, An accurate solution for Nereid's motion. I. Analytic modeling, *Astron. Astrophys.* **239**, 381.

Oort, J. H. : 1950, The structure of the cloud of comets surrounding the solar system, and a hypothesis concerning its origin, *Bull. Astron. Inst. Netherlands* **11**, 91.

Owen W.M., Vaughan, R.M., Synnott, S.P. : 1991, Orbits of the six new satellites of Neptune, *Astron. J.* **101**, 1511.

Peale, S.J. : 1986, Orbital resonances, unusual configurations and exotic rotation states among planetary satellites, in *Satellites* , J. Burns et M.S. Matthews eds., University of Arizona Press, Tucson, 159.

Pickering, W.H. : 1905, The ninth satellite of Saturn, *Ann. Harvard Coll. Obs.* **LIII**, 3, 45.

Poincaré, H. : 1893, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, réédité en 1987, A. Blanchard éd..

Pollack, J., Cuzzi, J.N. : 1982, Les anneaux dans le système solaire, *Le système solaire, Bibliothèque Pour la Science*, Belin éd., 149.

Rabe, E. : 1961, Determination and survey of periodic Trojan orbits in the restricted problem of three bodies, *Astron. J.* **66**, 500.

Radau, R. : 1895, Recherches concernant les inégalités planétaires du mouvement de la Lune, *Annales de l'observatoire de Paris* **21**, B1.

Radau, R. : 1911, Tables de la Lune fondées sur la théorie de Delaunay, *Annales du Bureau des longitudes* **7**.

Rapaport, M. : 1977, Contribution à l'étude dynamique des satellites de Saturne, *Thèse d'état*, université de Bordeaux I.

Rocher, P. : 1986 à 1993, Détermination d'orbites de comètes pour 1987, 1988, 1989, 1990, 1992, 1993, 1994, *Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes* **S014, S017, S019, S020, S033, S034, S042**.

Rocher, P. : 1995, *Notes cométaires du Bureau des Longitude* **0001 à 0151**.

Rocher, P. : 1996, Communication privée.

Rocher, P., Cavelier, F. : 1993, Détermination d'orbites de comètes pour 1995, *Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes* **S047**.

Rocher, P., Chapront, J. : 1996, Observations of the faint satellites of Jupiter (JVI, JVII, JVIII and JIX), *Astron. Astrophys.* **311**, 710.

Rocher, P., Satre, G. : 1989, Détermination d'orbites de comètes pour 1991, *Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes* **S027**.

Rose, L.E. : 1974, Orbit of Nereid and the mass of Neptune, *Astron. J.* **79**, 489.

Rose, L.E. : 1979, Motion of Phœbe (Saturn IX) 1904-1969 and a determination of Saturn's mass, *Astron. J.* **84**, 1067.

Ross, F.E. : 1905, Investigation on the orbit of Phœbe, *Ann. Harvard Coll. Obs.* **53**, 6.

Sagnier, J.-L. : 1981, Le mouvement des satellites galiléens de Jupiter. Une méthode d'étude analytique, *Thèse d'état* , université Paris 6.

Sampson, R.A. : 1910a, Tables of the four great satellites of Jupiter, Durham obs., Wesley and son, London.

Sampson, R.A. : 1910b, Preliminary comparison with observations of the tables of the four great satellites of Jupiter, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **71**, 76.

Sampson, R.A. : 1921, Theory of the four great satellites of Jupiter, *Mem. Roy. Astron. Soc.* **63**,1.

Seidelmann, P.K., Harrington, R.S., Pascu, D., Baum, W.A., Currie, D.G., Westphal, J.A., Danielson, G.E. : 1981, Saturn satellite observations and orbits from the 1980 ring plane crossing, *Icarus* **47**

Sharpless, B.P. : 1945, Secular accelerations in the longitudes of the satellites of Mars, *Astron. J.* **51**, 185.

Shor, V.A. : 1975, The motion of the Martian satellites, *Celest. Mech.* **12**, 61.

Shor, V.A. : 1988, Refinements of the orbits of Phobos and Deimos using ground and spacecraft observations (en russe), *Pis'ma Astron. Zh.* **14**, 1123.

Showalter, M.R. : 1991, Visual detection of 1981 S13, Saturn's eighteenth satellite, and its role in the Encke gap, *Nature* **351**, 709.

Simon, J.-L. : 1983, Théorie du mouvement des quatre grosses planètes. Solution TOP82, *Astron. Astrophys.* **120**, 197.

Simon, J.-L., Bretagnon, P. : 1978, Perturbations du deuxième ordre des quatre grosses planètes. Variations séculaires du demi-grand axe, *Astron. Astrophys.* **69**, 369.

Simon, J.-L., Bretagnon, P. : 1984, Théorie du mouvement de Jupiter et Saturne sur un intervalle de temps de 6000 ans. Solution JASON84, *Astron. Astrophys.* **138**, 169.

Simon, J.-L., Bretagnon, P., Chapront, J., Chapront-Touzé, M., Francou, G., Laskar, J. : 1994, Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets, *Astron. Astrophys.* **282**, 663.

Simon, J.-L., Chapront, J. : 1974, Perturbations du second ordre des planètes Jupiter et Saturne. Comparaison avec Le Verrier, *Astron. Astrophys.* **32**, 51.

Simon, J.-L., Francou, G. : 1981, Théorie au troisième ordre des masses des quatre grosses planètes, *Astron. Astrophys.* **103**, 223.

Simon, J.-L., Francou, G. : 1982, Amélioration des théories de Jupiter et Saturne par analyse harmonique, *Astron. Astrophys.* **114**, 125.

Simon, J.-L., Joutel, F. : 1988, Calcul des perturbations mutuelles de Jupiter et Saturne en fonction d'une seule variable angulaire, *Astron. Astrophys.* **205**, 328.

Simpson, R.A., Tyler, G.L., Holberg, J.B. : 1983, Saturn's pole : geometric correction based on Voyager UVS and radio occultations, *Astron. J.* **88**, 1531.

Sinclair, A.T. : 1972, The motions of the satellites of Mars, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **155**, 249.

Sinclair, A.T. : 1977, The orbits of Tethys, Dione, Rhea, Titan and Iapetus. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **180**, 447.

Sinclair, A.T. : 1989, The orbits of the satellites of Mars determined from Earth-based and spacecraft observations, *Astron. Astrophys.* **220**, 321.

Soderblom, L., Johnson, T. : 1982, Les satellites de Saturne, *Le système solaire, Bibliothèque Pour la Science*, Belin éd., 220.

Souillart, M. : 1880, Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter, *Mem. Roy. Astron. Soc.* **XLV**.

Spencer Jones, H. : 1939, The rotation of the Earth and the secular accelerations of the Sun, Moon and planets, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **99**, 541.

Standaert, D. : 1982, Comments about the direct perturbations of Venus and Mars in the Moon's motion, *Celest. Mech.* **26**, 113.

Standish, E.M. : 1982, Orientation of the JPL Ephemerides DE200/LE200 to the dynamical Equinox J2000, *Astron. Astrophys.* **114**, 297.

Standish, E.M. : 1986, Numerical planetary and lunar ephemerides : present status, precision and accuracies, in *Relativity in celestial mechanics and astrometry*, J. Kovalevsky and V.A. Brumberg eds., Reidel, Dordrecht, 71.

Standish, E.M. : 1990, The observational basis for JPL's DE200, the planetary ephemerides of the Astronomical Almanac, *Astron. Astrophys.* **233**, 252.

Standish, E.M., Williams, J.G., Newhall, XX : 1981, Intégration numérique DE200/LE200, bande magnétique.

Stern, A. : 1991, On the number of planets in the outer Solar system : evidence of a substantial population of 1000 km bodies, *Icarus* **90**, 271.

Stoer, J., Bulirsch, R. : 1980, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, New-York.

Stone, E.C., Miner, E.D. : 1989, The Voyager-2 encounter with the Neptunian system, *Science*

246, 1417.

Struve, G. : 1930, Neue unterssuchungen in Saturnsystem, *Veröff. Univ. Sternw. Berlin Babelsberg* **6**, cahiers 4 et 5.

Struve, H. : 1911, *Uber die Lage der Marsachse und die Konstanten im Marssystem*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1056.

Struve, O. : 1898, *Pub. Obs. Cent. Nicolas St Petersbourg* **XI**.

Taylor, T.H., Jacobson, R.A., Synnott, S.P., Lewis, G.D., Riedel, J.E., Roth, D.C. : 1986, Orbit determination for the Voyager II Uranus encounter, AIAA Paper N°**86-2112**, *AIAA/AAS Astrodynamics Conference*, Williamsburg, Virginia.

Taylor, D.B., Shen, K.H. : 1988, Analysis of astrometric observations from 1967 to 1983 of the major satellites of Saturn, å **200**, 269.

Taylor, D.B., Sinclair, S.T., Message, P.J. : 1987, Corrections to the theory of the orbit of Saturn's satellite Hyperion, å **181**, 383.

Tholen, D.J., Buie, M.W. : 1990, Further analysis of the Pluton-Charon mutual event observations, *Bull. Amer. Astron. Soc.* **22**, 1129.

Tholen, D.J., Tedesco, E.F., 1994 : Pluto's lightcurves results from four oppositions, *Icarus* **108**, 200.

Thuillot, W. : 1989, Prédiction des phénomènes des satellites galiléens, *Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes* **S015**.

Thuillot, W., Descamps, P. : 1990, A model for the lightcurves of the mutual events, *Comptes rendus du colloque PHEMU91*, J.-E. Arlot et R. Burchi éd., Bureau des longitudes.

Tisserand, F. : 1876, Note sur l'invariabilité des grands axes des orbites des planètes, *Compt. Rend. Acad. sci.* **82**, 442.

Tisserand, F. : 1889, Perturbations des planètes d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires, *Traité de mécanique céleste*, tome **I**, réédité en 1960, Gauthier-Villars, Paris.

Tisserand, F. : 1894, Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la Lune, *Traité de mécanique céleste*, tome **III**, Gauthier-Villars, Paris, 243.

Tisserand, F. : 1896, *Traité de mécanique céleste*, tome **IV**, réédité en 1960, Gauthier-Villars, Paris.

UAI : 1954, Proceedings of the 8th General Assembly, Rome, 1952, *Trans. IAU* **VIII**, Cambridge University Press, 66.

UAI : 1966, Proceedings of the 12th General Assembly, Hamburg, 1964, *Trans. IAU* **XIIB**, Academic Press, Londres, 113 et 593.

UAI : 1978, Proceedings of the 16th General Assembly, Grenoble, 1976, *Trans. IAU* **XVIB**, Reidel, Dordrecht, 58.

Vasundhara, R., Arlot, J.-E., Descamps, P. : 1995, New constants for Sampson-Lieske theory of the Galilean satellites from mutual occultations data, in *Dynamique, éphémérides et astrométrie dans le système solaire*, Symposium 172 de l'UAI, S. Ferraz-Mello, B. Morando et J.-E. Arlot éd.

Veillet, C. : 1981, Satellites of Saturn, *Circ. UAI* **3593**, **3608**.

Veillet, C. : 1982, Orbital elements of Nereid from new observations, *Astron. Astrophys.* **112**, 277.

Veillet, Ch. : 1983a, 1980-81. Observations of Miranda : new orbit and mass of Ariel and Umbriel, *Astron. Astrophys.* **118**, 211.

Veillet, Ch. : 1983b, De l'observation et du mouvement des satellites d'Uranus, *Thèse d'état*, Paris.

Veillet, C., Bois, E. : 1988, 1982-1984 observations of Nereid. New orbital determination, *Astron. Astrophys.* **189**, 303.

Vienne, A. : 1991, Théorie analytique des satellites de Saturne, *Thèse*, université de Lille.

Vienne, A., Duriez, L. : 1991, A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn. II. Short-period perturbations, å **246**, 619.

Vienne, A., Duriez, L. : 1992, A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn. III. Long-period perturbations, å **257**, 331.

Vienne, A., Duriez, L. : 1995, Ephemeris of the major Saturnian satellites, *Astron. Astrophys.* **297**, 588.

Vu, D.T., Sagnier, J.-L. : 1974, Mouvement des satellites galiléens de Jupiter, *Bull. G.R.G.S.* **11**.

Vu, D.T. : 1977, Une nouvelle présentation des éphémérides des satellites galiléens de Jupiter, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **30**, 361.

Vu, D.T. : 1986, Une étude analytique du mouvement des satellites galiléens de Jupiter, *Thèse d'état* , observatoire de Paris.

Weissmann, P. : 1990, in *Global Catastrophes in Earth History*, V. Sharpton and P. Ward eds., *Geo. Soc. of America Spec. Paper* **247**, 263.

Whipple, F.L. : 1950, On tests of the icy conglomerate model for comet, *Astron. J.* **55**, 83.

Williams, J.G., Sinclair, W.S., Yoder, C.F. : 1978, Tidal acceleration of the Moon, *Geophys. Res. Letters* **5**, 943.

Wisdom, J., Peale, S., Mignard, F. : 1984, The chaotic rotation of Hyperion, *Icarus* **58**, 137.

Woltjer, J : 1928, The motion of Hyperion, *Ann. Leiden Obs.* **16**, 3.

Woolard, E.W. : 1953, A redevelopment of the theory of nutation, *Astron. J.* **58**, 1.

Yeomans, D. K. : 1977, Comet Halley and nongravitational forces, *Astron. J.* **82**, 435.

Yoder, C.F., Colombo, G., Synnott, S.P., Yoder, K.A. : 1983, Theory of motion of Saturn's co-orbiting satellites, *Icarus* **53**, 431.

Yoder, C.F., Synnott, S.P., Salo, H. : 1989, Orbits and masses of Saturn's co-orbiting satellites, Janus and Epimetheus, *Astron. J.* **98**, 1875.

Young, L.A., Olkin, C.B., Elliot, J.L., Tholen, D.J., Buie, M.W. : 1994, The Charon-Pluto mass ratio from MKO astrometry, *Icarus* **108**, 186.

Zadunaïsky, P. : 1954, A determination of new elements of the orbits of Phœbe, ninth satellite of Saturn, *Astron. J.* **59**, 1.