CHAPITRE 9

PRÉSENTATION DES ÉPHÉMÉRIDES DE LA CONNAISSANCE DES TEMPS

9.1. REPRÉSENTATION DES ÉPHÉMÉRIDES

9.1.1. Les éphémérides tabulées

Les éphémérides, qui traduisent le mouvement des objets du système solaire dans les annuaires ou les almanachs, apparaissent généralement sous la forme de tables horaires, mensuelles ou annuelles. L'intervalle tabulaire est fonction de la rapidité de la variation de la quantité ou du phénomène qu'on cherche à représenter. On parle alors d'éphémérides tabulées. Cette technique présente un avantage évident de simplicité. Dans le cas de l'utilisation d'une éphéméride de faible précision, une lecture directe ou une interpolation à vue est généralement suffisante pour repérer un objet dans le ciel ou dater approximativement un phénomène. Par ailleurs, une tabulation autorise un certain systématisme dans la présentation d'un ouvrage, le texte résumant les explications et usages nécessitant un discours unique pour l'emploi de l'ensemble des tables. Cette représentation n'est cependant pas sans inconvénient. Lorsqu'on cherche à atteindre une précision élevée dans l'évaluation d'une quantité, l'interpolation linéaire devient insuffisante ; on est alors conduit à utiliser des formules d'interpolation dont le degré de complexité augmente avec la précision requise. Il est nécessaire, par ailleurs, que les tables demeurent interpolables au niveau de quelques unités de la dernière décimale affichée, c'est-à-dire que, suivant la rapidité et le caractère fortement non linéaire du phénomène qu'on représente, il faut diminuer l'intervalle tabulaire, et donc augmenter le nombre des abscisses auxquelles les fonctions sont évaluées. On est alors conduit à publier un volume important de données, et à exiger de l'utilisateur la mise en œuvre d'un calcul d'interpolation non trivial.

Afin d'illustrer notre propos, nous décrivons rapidement ci-dessous la technique d'interpolation d'une éphéméride. Plutôt que de parler, comme plus haut, d'évolution d'un phénomène (par exemple, le temps de passage d'un astre au méridien) ou de calcul d'une coordonnée (par exemple, une ascension droite), nous appellerons fonction l'éphéméride dont une table est fournie pour des dates particulières équidistantes. Les instants d'évaluation de la fonction $f(t)$ décrite dans l'éphéméride sont désignés par t_0, t_1, t_2, ... et les valeurs correspondantes de f par f_0, f_1, f_2, ... Notons respectivement $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, ..., les différences premières, secondes, troisièmes, ... ; elles valent :

$$
\begin{array}{lcll}
\Delta_k^{(1)} & = & f_{k+1} - f_k & \\
\Delta_k^{(2)} & = & \Delta_{k+1}^{(1)} - \Delta_k^{(1)} & \{k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\} \\
\Delta_k^{(3)} & = & \Delta_{k+1}^{(2)} - \Delta_k^{(2)} & \\
\cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

On forme le tableau suivant, ou tableau des différences :

$$
\begin{array}{llllll}
t_0 & f_0 & & & \\
 & & \Delta_0^{(1)} & & \\
t_1 & f_1 & & \Delta_0^{(2)} & \\
 & & \Delta_1^{(1)} & & \Delta_0^{(3)} \\
t_2 & f_2 & & \Delta_1^{(2)} & \\
 & & \Delta_2^{(1)} & & \\
t_3 & f_3 & & & \\
\cdots & \cdots & & &
\end{array}
\tag{9.1.1}
$$

L'intervalle de tabulation, que nous choisissons ici constant, est $h = t_{k+1} - t_k$, quel que soit k. On désigne par m l'abscisse relative de t dans l'intervalle $[t_k,\ t_{k+1}]$, soit :

$$m = \frac{t - t_k}{h},$$

m est la mesure de $t - t_k$ rapportée à l'intervalle h comme unité ; m est compris entre 0 et 1. Lorsqu'une interpolation linéaire est suffisante pour l'évaluation de f sur l'intervalle $[t_1,\ t_2]$, au point d'abscisse t de cet intervalle, f vaut :

$$f\,(t) = f_1 + m\Delta_1^{(1)}.$$

Dire que l'interpolation précédente est justifiée, c'est dire que les différences $\Delta^{(r)}$ d'ordre r supérieur à 1 sont négligeables. Lorsque cette approximation n'est plus valable, en se limitant aux différences troisièmes ainsi qu'elles apparaissent dans la construction de la ligne centrale du tableau (9.1.1), la formule de Bessel permet l'évaluation de f dans l'intervalle $[t_1,\ t_2]$ avec :

$$f\,(t) = f_1 + m\Delta_1^{(1)} - \frac{m(1-m)}{4}(\Delta_0^{(2)} + \Delta_1^{(2)}) + \frac{m(1-m)(1-2m)}{12}\Delta_0^{(3)}.$$

Le bref rappel qu'on vient de faire met en évidence deux types de difficultés : d'une part un calcul s'avère nécessaire dans le cas d'une évaluation précise (construction du tableau des différences et application de la formule de Bessel), d'autre part il convient de contrôler la précision en accord avec le rang des différences qui peuvent être négligées. La *Connaissance des Temps* jusqu'en 1979 contenait exclusivement des éphémérides tabulées. Citons deux exemples où il y avait nécessité d'évaluer jusqu'aux différences troisièmes : les coordonnées géocentriques de Mercure et celles de la Lune. Il n'y a pas là de quoi s'étonner puisqu'il s'agit de deux corps qui ont une période de révolution rapide sur l'année. Examinons plus précisément le cas de la Lune : pour représenter les coordonnées équatoriales (ascension droite α et déclinaison δ), afin d'assurer une précision interne de quelques unités de 0.001 s pour α et $0''.01$ pour δ, l'éphéméride était tabulée avec un intervalle de 3 heures. Par coordonnée, α ou δ, ce pas de représentation nécessitait 2920 valeurs annuellement. Afin de faciliter le travail de l'utilisateur une quantité équivalente à la différence première était fournie : la variation pour une minute en α et δ. Cette donnée supplémentaire permettait l'économie d'un rang dans la construction du tableau des différences tel que (9.1.1) pour α et δ, le prix à payer pour cette facilité étant un gonflement du volume des quantités publiées.

De nos jours, avec l'usage communément répandu des calculatrices de poche et de la micro-informatique, la simplicité de la formulation ne constitue plus un enjeu fondamental pour la construction des éphémérides. On cherche plutôt à conserver une précision de représentation optimale, voire à ramasser les résultats sous une forme compacte, soit pour couvrir des périodes de temps importantes, soit pour intégrer les données de manière légère à des logiciels informatiques. Ainsi, au lieu d'évaluer une fonction $f(t)$ sous la forme d'un tableau de valeurs calculées à des intervalles rapprochés du temps, on peut se fixer comme objectif d'établir des fonctions d'approximation de $f(t)$ valables sur de grands intervalles de temps, avec la double préoccupation de minimiser les erreurs et le volume global des données.

9.1.2. Approximation d'une fonction

Il n'est pas dans notre propos ici de discuter dans le détail des techniques mathématiques employées dans l'approximation des fonctions du temps qui représentent les éphémérides, mais plutôt de justifier de façon intuitive le choix des séries de Tchebychev introduites pour cette réalisation. Les éphémérides, ou les fonctions du temps $f(t)$ que nous considérons, sont définies sur un intervalle Δt, à partir de t_0, soit : $[t_0,\ t_0 + \Delta t]$. Dans la suite, pour parler un langage unique, nous nous intéresserons à des fonctions $f(x)$, d'une variable x, sur l'intervalle $[-1,\ +1]$. Le passage du temps t à la variable x est élémentaire ; la transformation est opérée à l'aide du changement de variable linéaire :

$$x = -1 + \frac{2(t - t_0)}{\Delta t}. \tag{9.1.2}$$

Afin de nous placer à l'intérieur d'un schéma aussi simple que possible, nous choisissons tout d'abord l'approximation polynomiale, pour des raisons de commodité d'évaluation. Nous envisagerons plus loin, avec l'introduction des fonctions mixtes, un autre schéma qui prendra en compte le caractère quasi-périodique des fonctions qui apparaissent dans les éphémérides.

• *Application du principe des moindres carrés*

Il est clair que les fonctions que nous approchons sont définies pour toutes les valeurs de x de l'intervalle, et qu'il est souhaitable de tenir compte de toutes ces valeurs plutôt que d'un ensemble arbitraire de valeurs discrètes. Ainsi, au lieu de déterminer une approximation $y(x)$ de $f(x)$, par un polynôme de degré N passant par $N+1$ valeurs tabulées a priori, comme c'est le cas de l'approximation lagrangienne, on demandera à $y(x)$ de représenter la meilleure approximation de $f(x)$ sur l'intervalle, dans un sens que nous allons préciser. En suivant le principe des moindres carrés de Legendre, on cherchera à rendre minimale la moyenne quadratique des erreurs (ou *résidus* R), ces erreurs étant représentées par les différences entre $f(x)$ et son approximation $y(x)$, en chaque point x de l'intervalle de définition $I : [-1,\ +1]$. Pour un nombre n de points x_i uniformément répartis sur l'intervalle $[-1,\ +1]$, on devra donc avoir

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R^2(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mid f(x_i) - y(x_i) \mid^2 \quad \text{minimum.} \tag{9.1.3}$$

Le passage au continu est obtenu sous la forme intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mid f(x) - y(x) \mid^2 \mathrm{d}x \quad \text{minimum.} \tag{9.1.4}$$

Un concept supplémentaire doit être introduit, celui de la *fonction de poids* $w(x)$, définie et positive, sur l'intervalle I de définition. On peut en effet affecter à chaque erreur un poids, c'est-à-dire une valeur $w(x)$ – ou pondération de l'erreur – attachée à chaque abscisse x, en fonction de sa distribution sur l'intervalle. Au lieu de (9.1.3) on imposera la nouvelle condition pondérée suivante

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(x_i) R^2(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(x_i) \mid f(x_i) - y(x_i) \mid^2 \quad \text{minimum.} \tag{9.1.5}$$

Le passage au cas continu est obtenu avec une écriture de la condition de Legendre sous la forme intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} w(x) \mid f(x) - y(x) \mid^2 \mathrm{d}x \quad \text{minimum.} \tag{9.1.6}$$

Soit maintenant, $\{\phi_0,\ \phi_1, \ldots, \phi_N\}$, un ensemble de $N+1$ polynômes choisis de manière appropriée, comme on le verra plus loin. On recherche une approximation $y(x)$ de $f(x)$ sous la forme d'une combinaison linéaire des $\{\phi_k\ ;\ k = 0, \ldots, N\}$:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \phi_k(x) \approx f(x). \tag{9.1.7}$$

Les a_k de la formule (9.1.7) sont déterminés de telle sorte que la condition des moindres carrés (9.1.5) soit remplie.

• *Les polynômes orthogonaux*

Introduisons un nouveau concept, celui de *polynôme orthogonal.* Sur l'intervalle $[-1,\ +1]$ on considère les fonctions $f(x)$ de carrés sommables, par rapport à la fonction de poids $w(x)$. Pour ces fonctions, l'intégrale $\int_{-1}^{+1} w\,(x) f^2\,(x)\,dx$ existe et a une valeur finie positive. Le *produit scalaire* de deux de ces fonctions f et g est construit avec :

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{+1} w\,(x)\,f\,(x)\,g\,(x)\,\mathrm{d}x,$$

et la norme, de même :

$$\| f \|^2 = \int_{-1}^{+1} w\,(x)\,f^2\,(x)\,\mathrm{d}x = (f \mid f). \tag{9.1.8}$$

On désigne $\| f \|$ sous le nom de *norme quadratique* de f.

Deux fonctions sont dites orthogonales si $(f \mid g) = 0$. Dans l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à N, on peut construire des sous ensembles de $N+1$ polynômes orthogonaux $\{\phi_0,\ \phi_1, \ldots, \phi_N\}$ qui vérifient :

$$(\phi_p \mid \phi_q) = 0 \text{ si } p \neq q, \text{ où } \phi_p \text{ est de degré } p \text{ et } \phi_q \text{ de degré } q.$$

Un tel sous ensemble constitue un système orthogonal. Il est possible d'imposer en outre des conditions sur les normes :

$$\| \phi_p \|^2 = (\phi_p \mid \phi_p).$$

Faisons le choix dans (9.1.7) d'un système orthogonal $\{\phi_k\}$, où k prend les valeurs $0, \cdots, N$. La condition de meilleure approximation au sens des moindres carrés de Legendre, par rapport à la norme (9.1.8) équivaut à $\| f\,(x) - y\,(x) \|$ minimum. Avec ce choix, le calcul des coefficients est explicite et dans le développement formel (9.1.7) ils sont donnés par :

$$a_k = \frac{\int_{-1}^{+1} w\,(x)\,f(x)\,\phi_k(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{+1} w\,(x)\,\phi_k^2(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{9.1.9}$$

Il existe une grande variété de choix de types de polynômes suivant la valeur de la fonction de poids $w(x)$. Le choix le plus simple est celui où $w(x) = 1$ qui conduit aux *polynômes de Legendre.* Avec le choix de la fonction de poids :

$$w\,(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

on est conduit aux *polynômes de Tchebychev.* Alors que dans le premier cas, avec Legendre, on attribue un poids constant égal sur tout l'intervalle, dans le second cas, avec Tchebychev, le poids est moindre au centre de l'intervalle qu'aux extrémités.

9.1.3. Les polynômes de Tchebychev

Pour expliquer notre choix des polynômes de Tchebychev quelques remarques préliminaires s'imposent. En apparence le choix des polynômes de Legendre associés à la fonction de poids $w(x) = 1$ semble être le plus simple. Cependant un examen de l'erreur entraînée par ce choix montre que celle-ci est plus grande aux extrémités de l'intervalle qu'au centre. Dans le cas des polynômes de Tchebychev elle est régulièrement distribuée sur tout l'intervalle. L'approximation de Tchebychev, parmi les différents types d'approximations polynomiales, réalise la meilleure approximation dans le sens où elle est celle de plus bas degré dont l'erreur (ou écart à la valeur vraie) ne s'écarte pas au-delà d'une valeur imposée a priori (ou tolérance).

• *Les propriétés fondamentales des polynômes de Tchebychev*

Désignons par $T_n(x)$ le polynôme de Tchebychev de degré n. La relation d'orthogonalité est traduite dans ce cas par :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_p(x)\,T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pour } p \neq q.$$

On impose de plus les conditions suivantes sur les normes :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_0^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \pi,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_p^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{pour } p \neq 0.$$

Il est alors aisé de construire de proche en proche les polynômes $T_n(x)$. Nous donnons les quatre premiers, à titre d'illustration :

$$T_0 = 1 \qquad T_1 = x \qquad T_2 = 2x^2 - 1 \qquad T_3 = 4x^3 - 3x.$$

Les polynômes vérifient la relation de récurrence :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{9.1.10}$$

Cette formule qui est d'une très grande simplicité est la base de l'évaluation des polynômes de Tchebychev pour une valeur donnée de la variable x, ainsi que de toute combinaison linéaire de ceux-ci. Une variante est offerte par une autre formulation très simple qui apparaît avec le changement de variable : $x = \cos\theta$. T_n devient alors :

$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right). \tag{9.1.11}$$

Les coefficients a_k de l'approximation $y(x)$ de la formule (9.1.7), donnés en (9.1.9), prennent alors la forme explicite :

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x, \quad \text{pour } k \neq 0, \tag{9.1.12}$$

et,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x.$$

Dans cette formulation, le développement $y(x)$ limité au degré N devient :

$$y(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \; T_k(x) \approx f(x). \tag{9.1.13}$$

L'analogie avec l'approximation de Fourier est évidente. Exprimé dans la variable θ, avec $x = \cos\theta$, le calcul du coefficient a_k donné ci-dessus en (9.1.12) prend alors la forme suivante,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) \cos(k\theta) \,\mathrm{d}\theta, \qquad \text{pour } k \neq 0,$$

et,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) \,\mathrm{d}\theta.$$

L'approximation $y(\cos\theta)$ est :

$$y(\cos\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos k\theta. \tag{9.1.14}$$

• *Calcul pratique des approximations de Tchebychev*

Il résulte de la formule (9.1.11) que les zéros du polynôme T_n sont :

$$x_i = \cos \pi \frac{2i-1}{2n}\,; \quad (i = 1, \; \cdots, \; n).$$

Ces zéros sont aussi appelés *abscisses de Tchebychev* sur l'intervalle $[-1, \; +1]$. Les abscisses correspondant au polynôme de Tchebychev de degré K peuvent être utilisées pour le calcul approché de l'intégrale d'une fonction $g(x)$ quelconque dite intégrale gaussienne :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x.$$

On obtient, en effet, par l'intermédiaire du changement de variable $x = \cos\theta$,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{K} \sum_{i=1}^{K} g(x_i)\,; \quad x_i = \cos \pi \frac{2i-1}{2K} \quad \text{avec } (i = 1, \; \cdots, \; K). \tag{9.1.15}$$

La qualité de l'approximation augmente avec K, tant que les erreurs d'arrondi n'entrent pas en jeu.

Revenons maintenant à notre éphéméride. C'est une fonction $f(t)$ constituée, soit par le résultat d'une intégration numérique, soit par une fonction analytique du temps qui traduit le mouvement d'un corps ou l'évolution temporelle d'un phénomène. Sur un intervalle choisi Δt du temps, on ramène avec le changement de variable linéaire explicité en (9.1.2), la variable indépendante à x et l'intervalle au support unité. Nous cherchons à construire l'approximation en polynômes de Tchebychev (9.1.13), limitée au degré N, c'est-à-dire à obtenir les coefficients a_k pour $k \leq N$. Les intégrales (9.1.12) sont obtenues à partir de quadratures gaussiennes de fonctions $g(x)$ de la forme $f(x)T_k(x)$ $(k = 1, \cdots, N)$. On peut montrer que l'approximation (9.1.15) est utilisable à condition de prendre $K \geq N + 1$. On obtient alors,

$$a_k = \frac{2}{K} \sum_{i=1}^{K} f\,(x_i)\, T_k(x_i),$$

$$a_0 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} f\,(x_i),$$

avec,

$$x_i = \cos \pi \frac{2i - 1}{2K} \quad \text{où } i = 1, \cdots, K.$$

Le survol qui vient d'être fait nous indique la technique opératoire pour représenter l'éphéméride. La qualité de l'approximation – c'est-à-dire l'estimation des erreurs commises dans les approximations précédentes – est un problème essentiel que nous n'aborderons pas en détail ici. Pratiquement il se pose en ces termes : quel intervalle Δt et quelle borne N choisir dans le développement (9.1.13) pour obtenir une bonne approximation de $f(t)$, c'est-à-dire pour que l'erreur ne dépasse pas sur l'intervalle la tolérance que nous nous sommes fixée a priori ? Le plus souvent, une bonne réponse est le fruit de l'expérience prenant en compte la nature des fonctions $f(t)$ mises en œuvre. Une propriété fondamentale de l'approximation en polynômes de Tchebychev nous guide dans la mesure approchée de l'erreur. Si le développement limité (9.1.13) peut être confondu avec le début du développement infini :

$$f\,(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, T_k(x),$$

alors l'erreur dans (9.1.13) se comporte comme $a_{N+1}T_{N+1}(x)$, c'est-à-dire qu'elle oscille entre les $N + 1$ racines de T_{N+1}, avec une amplitude ne dépassant pas $\mid a_{N+1} \mid$. C'est un bon indicateur de l'erreur commise dans l'approximation. Dans cette optique, l'approximation de $f(x)$ par des polynômes de Tchebychev de degré inférieur ou égal à N peut être considérée comme une interpolation basée sur les points :

$$x_j = \cos \pi \frac{2j - 1}{2N + 2} \quad \text{où } j = 1, \cdots, N + 1.$$

9.1.4. Approximation par des fonctions mixtes

Sans chercher à justifier notre propos par une argumentation mathématique rigoureuse, il est clair que si la fonction $f(x)$ comporte sur l'intervalle $[-1,\ +1]$ un petit nombre d'oscillations, avec des variations d'amplitudes faibles, elle peut être approchée par un développement de Tchebychev de degré N peu élevé. C'est une vision qualitative du comportement des fonctions auxquelles on a affaire dans les éphémérides. On peut, pour s'en convaincre, se reporter à une illustration : la *Connaissance des Temps* publie la longitude géocentrique de la Lune avec 8 coefficients de Tchebychev $(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_7)$ sur un intervalle de 4 jours avec une précision de l'ordre de $0''.01$. Les termes de Fourier associés à des périodes élevées et de faible amplitude sont oubliés dans cette représentation. On s'assure seulement que l'intervalle (ici $\Delta t = 4$ jours) est suffisamment petit pour garantir une bonne convergence numérique du développement. De manière plus générale, le caractère quasi-périodique des solutions aux mouvements des corps du système solaire n'est pas pris en compte dans le formalisme en polynômes de Tchebychev. Pour illustrer notre propos, regardons sur un exemple élémentaire comment tirer parti du caractère quasi-périodique d'une fonction. Soit la fonction paire $f(x) = \cos x + \cos 2x$. Elle est beaucoup plus simplement représentée, et ici de manière triviale, avec la base de fonctions $\{1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \cdots\}$ qu'avec la suite de polynômes $\{1,\ x^2,\ x^4,\ x^6,\ \cdots\}$, ou toute autre base de polynômes pairs.

• *Les bases des fonctions mixtes*

En réalité une éphéméride ne peut pas se ramener à un schéma aussi simpliste. Cependant, on peut chercher, sur un intervalle fini du temps, à l'approcher par un agrégat de fonctions périodiques, dont la période est suggérée par la nature physique du problème que l'on traite (par exemple la période propre de révolution d'un corps céleste), et par des termes séculaires (ou des polynômes du temps) à cause du caractère non rigoureusement périodique des solutions. Désignons par $\{\phi_0,\ \phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_N\}$ l'agrégat des fonctions qui servent de base à l'approximation. La nature physique du problème va nous guider dans le choix des éléments de cette base. Soit $f(t)$ une fonction définie sur l'intervalle $[t_0,\ t_0 + \Delta t]$ que nous rapportons à l'intervalle $[-1,\ +1]$ à l'aide de la transformation (9.1.2). Comme précédemment, nous notons $f(x)$ la fonction transformée. Si $f(t)$ se comporte comme une fonction périodique du temps, de période $2\pi/\nu$, $f(x)$ se comporte alors comme une fonction périodique de x de période $4\pi/\nu\Delta t$. La composante paire de $f(x)$ est :

$$P(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

et sa composante impaire :

$$I(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

Désignons par ω la pulsation de la fonction de la variable x, $P(x)$ ou bien $I(x)$,

$$\omega = \nu\frac{\Delta t}{2},$$

on construit une approximation convenable de $P(x)$ sur la base paire avec :

$$\{\phi_n^P\} = \{1,\ \cos\omega x,\ \cos 2\omega x,\ \cdots,\ \cos N\omega x\}, \tag{9.1.16}$$

et de $I(x)$ sur la base impaire avec :

$$\{\phi_n^I\} = \{x,\ \sin\omega x,\ \sin 2\omega x,\ \cdots,\ \sin N\omega x\}. \tag{9.1.17}$$

Dans ce cas ω est une pulsation proche de la pulsation principale du mouvement. S'il existe une pulsation ω' différente de ω ou de ses multiples dont la signature dans $f(x)$ est importante, les bases (9.1.16) et (9.1.17) peuvent être complétées avec les suites paires et impaires suivantes :

$$\{\phi_n'^P\} = \{\cos\omega' x,\ \cos 2\omega' x,\ \cdots,\ \cos N'\omega' x\}, \tag{9.1.18}$$

$$\{\phi_n'^I\} = \{\sin\omega' x,\ \sin 2\omega' x,\ \cdots,\ \sin N'\omega' x\}. \tag{9.1.19}$$

Par ailleurs, des termes mixtes de la forme :

$$x^k \cos p\omega x \text{ et } x^k \sin p\omega x$$

où p et k sont des entiers, peuvent être ajoutés à la base formée des suites (9.1.16) et (9.1.17) si celle-ci est insuffisamment représentée avec des termes périodiques et le terme séculaire principal x. Dans de nombreux cas d'approximations de solutions aux mouvements des satellites naturels des planètes, la base complète donnée ci-dessous s'est avérée suffisante :

$$\{\phi_n^P\} = \{1,\ \cos\omega x,\ x\sin\omega x,\ x^2\cos\omega x,\ \cos 2\omega x\}, \tag{9.1.20}$$

$$\{\phi_n^I\} = \{x,\ \sin\omega x,\ x\cos\omega x,\ x^2\sin\omega x,\ \sin 2\omega x\}. \tag{9.1.21}$$

• *Calcul pratique de l'approximation à l'aide des fonctions mixtes*

La meilleure approximation $y(x)$ de $f(x)$ avec la séquence des fonctions indépendantes $\{\phi_k\ ;\ 1 \leq k \leq n\}$ est :

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(x).$$

Pour construire les a_k, il faut comme auparavant former les produits scalaires

$$\big(f(x) \mid \phi_i(x)\big) = \int_{-1}^{+1} w(x)\, f(x)\, \phi_i(x)\, \mathrm{d}x.$$

Ne jouissant plus ici, comme sur une base polynomiale, de l'analogie avec le calcul des coefficients de Fourier (*cf.* 9.1.3), nous avons fait le choix le plus simple de fonction de poids, soit : $w(x) = 1$. Le calcul des a_k est réalisé par la résolution de l'équation matricielle :

$$\mathcal{M}\,(a_i) = (b_i).$$

Les (a_i) et (b_i) sont des vecteurs colonnes. $\mathcal{M}$ est la matrice d'éléments $m_{i,j}$ qui sont calculés à l'aide des produits scalaires :

$$m_{i,j} = \int_{-1}^{+1} \phi_i(x)\, \phi_j(x)\, \mathrm{d}x = (\phi_i \mid \phi_j)\ ; \quad 1 \leq i \leq n\ ; \quad 1 \leq j \leq n.$$

Par ailleurs,

$$b_i = \int_{-1}^{+1} f(x)\,\phi_i(x)\,\mathrm{d}x = (f \mid \phi_i)\ ; \quad 1 \leq i \leq n. \tag{9.1.22}$$

Le schéma qu'on vient de tracer est un résumé de la méthode de construction de l'approximation de $f(x)$ à l'aide d'une base telle que (9.1.20) pour sa composante paire et (9.1.21) pour sa composante impaire.

Le mode de représentation à l'aide des fonctions mixtes est particulièrement bien adapté à la représentation des mouvements des satellites naturels des planètes, et de manière plus générale aux mouvements des corps qui s'écartent peu, sur quelques périodes, d'un mouvement quasi-périodique ou périodique, avec des variations d'amplitude et de fréquence lentes par rapport à la période principale du corps et de ses multiples entiers. Dans la *Connaissance des Temps* on trouve en particulier l'expression des coordonnées différentielles des satellites naturels des planètes sur des intervalles de temps couvrant une à quelques révolutions, avec des formules faciles à mettre en œuvre directement par l'utilisateur et qui se présentent ainsi :

$$f(t) = a_0 + a_1 t + b_0 \sin(\nu t + \phi_0) + b_1 t \sin(\nu t + \varphi_1) + b_2 t^2 \sin(\nu t + \varphi_2) + c_0 \sin(2\nu t + \Psi_0). \tag{9.1.23}$$

$2\pi/\nu$ est une période proche de la période de révolution du corps ; les a_j, b_j, c_j, sont les amplitudes ; les ϕ_j et Ψ_j sont les phases ($j = 0,\ 1,\ 2$). La formule (9.1.23) découle du choix de la base donnée en (9.1.20) et (9.1.21). Les termes mixtes sont symbolisés ici par des combinaisons de la forme : $At^k \sin(p\nu t + \Psi)$ (k et p entiers ; A : amplitude ; Ψ : phase). Sur un intervalle de temps donné les valeurs maximales de k et p seront ajustées en fonction de la précision recherchée. Si l'intervalle de représentation est élargi, il faudra dans (9.1.23) enrichir la base de termes mixtes en puissance du temps et en multiples de la fréquence de base.

9.1.5. Approximation de Fourier-Tchebychev

Dans le paragraphe qui précède nous nous sommes intéressés à des fonctions du temps $f(t)$ qui ont une structure simple et qui peuvent être représentées avec une bonne précision sous la forme d'un développement analogue à celui de la formule (9.1.23). Par ailleurs si l'éphéméride est le résultat d'une théorie du mouvement construite explicitement à l'aide de développements en séries de fonctions quasi-périodiques du temps – séries de Fourier ou séries de Poisson[1] – nous n'avons pas tiré bénéfice de cette richesse dans l'évaluation pratique de l'approximation. En effet le calcul des amplitudes et des phases dans (9.1.23) est indifférent à la structure de la solution, qu'il s'agisse de développements formels explicites ou du résultat d'une intégration numérique. Seules comptent les valeurs numériques de $f(t)$ en des points appropriés pour le calcul des intégrales (9.1.22).

Dans ce qui suit, nous allons tirer parti de la connaissance explicite de la solution, exprimée sous la forme de séries de Poisson, conduisant à l'évaluation de l'éphéméride. Nous supposerons

[1] Les séries de Poisson sont des séries de Fourier dont les coefficients des termes périodiques sont des fonctions lentement variables du temps (polynômes du temps de degré modéré).

que la formulation explicite de la solution est traduite à l'aide de séries du temps t dont les termes individuels s'écrivent :

$$S_n = \rho_n(t) \sin[\omega_n t + \sigma_n(t)] \; ; \quad \omega_n \geq 0. \tag{9.1.24}$$

La solution complète est une somme de termes tels que S_n. Sur un intervalle fixé du temps Δt, les quantités $\rho_n(t)$ et $\sigma_n(t)$ sont regardées comme des fonctions du temps t à variations lentes. On décompose l'ensemble des fréquences $\{0 \leq \omega_n \leq \omega_{max}\}$ en P sous-ensembles de fréquences $\{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots, \omega^{(P)}\}$, en choisissant une fréquence de référence μ – ou fréquence de base – qui vérifie la condition :

$$P\mu \geq \omega_{max}.$$

Tous les termes S_n d'une série correspondant à un sous-ensemble de fréquences $\{\omega^{(p)}\}$, avec $1 \leq p \leq P$, ont des fréquences comprises entre $(p-1)\mu$ et $p\mu$. Si l'on pose :

$$\phi_n = \omega_n - p\mu + \frac{\mu}{2}, \quad \Psi_n = p\mu - \frac{\mu}{2},$$

les termes courants S_n de la solution dans (9.1.24) s'écrivent alors :

$$S_n = \rho_n(t) \sin[\phi_n t + \sigma_n(t)] \cos(\Psi_n t) + \rho_n(t) \cos[\phi_n t + \sigma_n(t)] \sin(\Psi_n t). \tag{9.1.25}$$

Les angles $\Psi_n t$ ont une variation rapide sur l'intervalle Δt. Les coefficients des termes périodiques $\cos(\Psi_n t)$ et $\sin(\Psi_n t)$, c'est-à-dire :

$$\rho_n(t) \sin[\phi_n t + \sigma_n(t)] \text{ et } \rho_n(t) \cos[\phi_n t + \sigma_n(t)], \tag{9.1.26}$$

varient lentement avec le temps. Il est clair en outre que plus μ est petit et plus cette variation est lente sur l'intervalle. Le principe de la méthode de Fourier-Tchebychev est d'approcher les fonctions lentement variables du temps de (9.1.26) par des développements en polynômes de Tchebychev sur Δt, et de laisser sous une forme trigonométrique les fonctions à variations rapides $\cos(\Psi_n t)$ et $\sin(\Psi_n t)$. Ces dernières peuvent être évaluées rapidement à partir des arguments μ et $\mu/2$.

En conclusion, l'approximation de Fourier-Tchebychev transforme les séries issues des théories de telle sorte que les composantes à longues périodes qui sont aisément représentées par des développements polynomiaux de Tchebychev soient séparées des composantes à courtes périodes dont la forme de Fourier est préservée. L'approximation de Fourier-Tchebychev n'est pas utilisée pour la représentation des éphémérides mais est l'étape intermédiaire entre la solution et l'éphéméride. L'avantage de l'utilisation de cette représentation mixte par rapport au calcul direct des éphémérides dans la représentation unique en polynômes de Tchebychev, est de diminuer considérablement le nombre de substitutions des valeurs du temps dans les volumineuses séries qui traduisent les développements explicites des théories. Par ailleurs, la précision de représentation de cette méthode se dégrade lentement en dehors des intervalles de validité.

9.2. ÉPHÉMÉRIDES DU SOLEIL, DE LA LUNE ET DES PLANÈTES

9.2.1. Sources des éphémérides

9.2.1.1. Éphémérides du Soleil, de la Lune et des planètes principales

Depuis 1984, les éphémérides du Soleil, de la Lune et des planètes publiées chaque année dans la *Connaissance des Temps* sont calculées à partir des théories élaborées au Bureau des longitudes. Ce sont les solutions suivantes :
- VSOP82 (Bretagnon, 1982) pour le Soleil et les planètes de Mercure à Mars,
- VSOP82 et TOP82 (Simon, 1983) pour les planètes de Jupiter à Neptune,
- ELP 2000–82 (Chapront-Touzé et Chapront, 1983) pour la Lune.

Ces théories sont décrites aux paragraphes 8.1.4.3 et 8.2.4.

9.2.1.2. Éphémérides de Pluton et des petites planètes Cérès, Pallas, Junon et Vesta

Les éphémérides de Pluton sont établies à partir de l'intégration numérique DE200 élaborée au Jet Propulsion Laboratory (Standish et al., 1981). Pour les quatre petites planètes Cérès, Pallas, Junon et Vesta, on utilise les résultats des intégrations numériques CPJV (Rocher, 1982, 1990) calculées au Bureau des longitudes d'après le modèle défini dans les *Astronomical Papers of American Ephemeris* (Duncombe, 1969).

9.2.1.3. Représentation des sources sous forme d'éphémérides Tchebychev

Les nouvelles théories dynamiques du Bureau des longitudes sont développées en séries de Fourier représentant les variables elliptiques des planètes (VSOP82, TOP82) et les coordonnées écliptiques de la Lune (ELP 2000–82). Ces développements contiennent un grand nombre de termes périodiques et de termes de Poisson. On en compte plus de 70 000 pour VSOP82 et plus de 15 000 pour ELP 2000–82, ce qui rend ces solutions difficilement maniables pour les utilisateurs.

La méthode qui consiste à tronquer les séries en éliminant les termes inférieurs à une valeur fixée a priori n'est pas satisfaisante car elle entraîne une perte de précision difficile à apprécier et largement supérieure au niveau de la troncature. Aussi, nous avons préféré représenter les théories par des suites de développements en polynômes de Tchebychev définis sur des intervalles de temps rangés dans l'ordre chronologique. Cette méthode de représentation est présentée au paragraphe 9.1.3. Elle permet de comprimer le volume des données à traiter et de calculer rapidement les positions des corps. Pour ces raisons, elle est très bien adaptée aux besoins des astronomes (amateurs, professionnels, théoriciens, astrométristes, $\cdots$) ainsi qu'au pilotage automatique d'instruments d'observation terrestres et spatiaux.

Nous appelons *éphémérides Tchebychev* l'approximation d'éphémérides astronomiques par des développements en polynômes de Tchebychev. L'utilisation de ces éphémérides se fait de la manière suivante. Les polynômes de Tchebychev de première espèce $T_n(x)$ sont donnés par la relation :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \tag{9.2.1}$$

Table 9.2.1. Paramètres de l'approximation Fourier-Tchebychev utilisés pour les théories des planètes (VSOP82) et de la Lune (ELP 2000–82).

μ : fréquence de base des séries.
P : nombre de sous-ensembles de fréquences.
ω_{max} : fréquence maximum des séries.
Δt : taille des intervalles de temps.
p : précision de représentation.
N : nombre maximum de coefficients de Tchebychev utilisés.

	μ (rad/j)	P	ω_{max} (rad/j)	Δt (j)	p (rad)	N
Mercure	0.0065	131	0.850 71	1 920	10^{-11}	16
Vénus	0.0033	149	0.490 55	3 840	10^{-10}	16
Barycentre Terre-Lune	0.0065	101	0.653 56	1 920	10^{-10}	16
Mars	0.0033	128	0.419 40	3 840	10^{-10}	16
Jupiter	0.0033	152	0.498 52	3 840	2×10^{-10}	16
Saturne	0.0033	130	0.428 55	3 840	2×10^{-10}	16
Uranus	0.0033	130	0.428 55	3 840	2×10^{-10}	16
Neptune	0.0033	152	0.499 87	3 840	2×10^{-10}	16
Lune	0.0151	146	2.194 46	832	5×10^{-11}	16

On peut aussi les calculer à l'aide de la relation de récurrence :

$$T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \qquad \text{avec} \quad T_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad T_1(x) = x. \tag{9.2.2}$$

Étant donnée la suite de coefficients $\{a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_N\}$ constituant l'éphéméride Tchebychev de la coordonnée $g(t)$ sur l'intervalle $[t_1,\ t_2]$, l'utilisateur peut calculer cette coordonnée pour n'importe quel instant t de cet intervalle en effectuant le changement de variable

$$x = -1 + \frac{2(t - t_1)}{t_2 - t_1}, \tag{9.2.3}$$

et le calcul

$$g(t) \approx a_0 T_0(x) + a_1\, T_1(x) + \cdots + a_N\, T_N(x). \tag{9.2.4}$$

9.2.1.4. Précision des sources et précision de représentation

La précision des sources des éphémérides dépend de nombreux facteurs : qualité du modèle, précision numérique des calculs, incertitude des observations, choix des constantes physiques, système de référence utilisé. Les théories du Bureau des longitudes (VSOP82, TOP82, ELP 2000–82) ont été ajustées à l'intégration numérique DE200/LE200 du Jet Propulsion Laboratory (*cf.*

8.2.3) considérée comme modèle observationnel de haute précision compte tenu du grand nombre d'observations optiques utilisées et de la qualité des techniques radar et laser mises en œuvre. Une comparaison de ces théories avec DE200/LE200 permet de donner un ordre de grandeur de la précision de ces sources (*cf.* 8.1.4.5 et 8.2.4.5).

La précision de représentation traduit la qualité de la méthode d'approximation utilisée pour représenter les sources des éphémérides. Ainsi, le remplacement de théories dynamiques par des éphémérides Tchebychev n'a d'intérêt que si la précision de représentation ne dégrade pas celle des sources. En pratique, cela se vérifie en étudiant la décroissance des coefficients de Tchebychev sur chaque intervalle de temps et l'ordre de grandeur des premiers coefficients négligés dans les développements polynômiaux.

Par ailleurs, il est souhaitable aussi que les éphémérides Tchebychev approchent les théories sur une longue période de l'ordre de plusieurs siècles. Cela peut entraîner un grand nombre de substitutions du temps dans des séries volumineuses. L'importance de ces calculs numériques pour construire une éphéméride Tchebychev peut être réduite en utilisant une représentation intermédiaire : l'approximation Fourier-Tchebychev (Chapront, 1982). Cette méthode qui est présentée dans le paragraphe 9.1.5 est particulièrement efficace pour les solutions contenant un grand nombre de termes. Les paramètres utilisés pour l'approximation Fourier-Tchebychev des théories VSOP82 et ELP 2000–82 sont donnés dans la table 9.2.1.

9.2.2. Éphémérides Tchebychev BDL82

Les éphémérides Tchebychev BDL82 constituent depuis 1982 les éphémérides de base du Bureau des longitudes pour le Soleil, la Lune et les planètes. Construites à partir des sources et avec les méthodes d'approximation citées dans le paragraphe 9.1, elles sont utilisées depuis 1984 pour calculer les éphémérides Tchebychev publiées chaque année dans la *Connaissance des Temps* (Francou et al., 1983).

9.2.2.1. Intervalle de validité

Les éphémérides Tchebychev BDL82 du Soleil, de la Lune, du barycentre Terre-Lune et des planètes principales issues de VSOP82 et ELP 2000–82 couvrent l'intervalle [1600, 2050]. Celles de Pluton issues de DE200 sont définies sur l'intervalle [1800, 2050] et celles des petites planètes Cérès, Pallas, Junon et Vesta issues de CPJV sur l'intervalle [1900, 2050].

Ces éphémérides se présentent sous la forme de tables de coefficients de Tchebychev représentant les coordonnées des corps sur des intervalles de temps qui se succèdent dans l'ordre chronologique sans chevauchement ni discontinuité et dont la taille est un sous-multiple de 32 jours.

9.2.2.2. Échelle de temps

Selon les recommandations de l'Union Astronomique Internationale (UAI, 1991), l'argument temporel des éphémérides géocentriques apparentes est le Temps terrestre TT (*cf.* 3.7). Le Temps terrestre TT, utilisé pour les observations effectuées sur Terre, est réalisé physiquement par la mesure du Temps atomique international TAI. Quelle que soit la date, on a la relation :

$$\mathrm{TT} = \mathrm{TAI} + 32.184\,\mathrm{s}. \tag{9.2.5}$$

L'échelle de temps utilisée dans les sources d'éphémérides du Bureau des longitudes est le Temps dynamique barycentrique TDB (*cf.* 3.8) qui diffère de TT par des termes périodiques et des termes de Poisson. À la précision des éphémérides publiées dans la *Connaissance des Temps*, ces différences n'ont pas d'effets notables. On peut donc considérer que l'argument temporel utilisé dans les éphémérides Tchebychev BDL82 est le Temps terrestre égal à TAI+32.184 s quel que soit le centre du système : coordonnées géocentriques, héliocentriques ou barycentriques.

9.2.2.3. Système de référence

Pour des raisons de cohérence, toutes les éphémérides Tchebychev BDL82 sont rapportées à l'écliptique dynamique moyen inertiel J2000 et à l'équinoxe dynamique moyen inertiel J2000 définis par VSOP82. La théorie VSOP82 a été ajustée à l'intégration numérique DE200 du Jet Propulsion Laboratory. Cet ajustement permet d'orienter le repère de VSOP82 par rapport au repère de DE200 (Standish, 1982). La localisation de l'équinoxe dynamique γ_{VSOP82} dans l'équateur DE200 et la valeur de l'obliquité moyenne ε_{VSOP82} sont définies, pour l'époque standard J2000, par les relations suivantes issues des formules (4.2.8) et (4.2.9) :

$$\begin{aligned} \gamma_{DE200}\ \gamma_{VSOP82} &= -0''.0930 \\ \varepsilon_{DE200} - \varepsilon_{VSOP82} &= 0''.0028. \end{aligned} \tag{9.2.6}$$

Ces écarts sont dus essentiellement au fait que la solution VSOP82 est construite dans un repère dynamique inertiel alors que l'intégration numérique DE200 est définie dans un repère dynamique rotationnel. Les éphémérides Tchebychev BDL82 du Soleil et des planètes principales étant directement calculées à partir de VSOP82, elles sont donc implicitement rapportées au repère de VSOP82 (*cf.* 4.2.5).

La solution ELP 2000–82 de la Lune a été ajustée à l'intégration numérique LE200. Elle est rapportée à l'écliptique dynamique moyen de la date et au *point de départ* de ce plan défini au paragraphe 8.2.4.1. Pour construire les éphémérides Tchebychev BDL82 de la Lune, ces coordonnées ont été rapportées au repère de VSOP82 en additionnant à la longitude V et à la latitude U les corrections δV et δU (Chapront-Touzé et Chapront, 1983) :

$$\begin{aligned} \delta V &= \sin\pi_A[\sin\Pi_A \sin V + \cos\Pi_A\cos V] \\ &\qquad [-\tan U + \sin\pi_A(1/2 + \tan^2 U)(\sin\Pi_A\cos V - \cos\Pi_A \sin V)] \\ \delta U &= \sin\pi_A(\cos\Pi_A\sin V - \sin\Pi_A\cos V) \\ &\quad - 1/2\tan U\sin^2\pi_A(\sin\Pi_A\sin V + \cos\Pi_A\cos V)^2, \end{aligned} \tag{9.2.7}$$

les quantités Π_A et π_A étant définies par les relations suivantes (Bretagnon et Chapront, 1981) :

$$\begin{aligned} \sin\pi_A\sin\Pi_A &= 4''.1997\,t + 0''.193\,96\,t^2 - 0''.000\,222\,t^3 \\ \sin\pi_A\cos\Pi_A &= -46''.8093\,t + 0''.051\,05\,t^2 + 0''.000\,524\,t^3. \end{aligned} \tag{9.2.8}$$

où t est le temps exprimé en siècles juliens (36 525 jours) à partir de J2000.

Les positions de Pluton qui se présentent déjà sous la forme d'éphémérides Tchebychev dans DE200 ont été également rapportées au repère de VSOP82 en utilisant les relations (9.2.6). Celles des petites planètes Cérès, Pallas, Junon et Vesta proviennent des intégrations numériques CPJV dont les conditions initiales sont rapportées au repère du catalogue fondamental FK4 1950.0. Pour passer dans le repère de VSOP82, on a tenu compte de la correction d'équinoxe de 0.035 s ($0''.525$) en 1950.0 (Fricke, 1982) et du mouvement de précession des plans de référence entre 1950.0 et J2000 (Lieske et al., 1977).

9.2.2.4. Types de coordonnées

Les positions représentées dans les éphémérides Tchebychev BDL82 sont des coordonnées rectangulaires géométriques exprimées en unités astronomiques. Elles sont barycentriques pour le Soleil, géocentriques pour la Lune et héliocentriques pour les planètes et le barycentre Terre-Lune.

Les variables elliptiques des planètes utilisées dans VSOP82 sont :

$$a,\ \lambda,\ k\,(= e\cos\varpi),\ h\,(= e\sin\varpi),\ q\,(=\gamma\cos\Omega),\ p\,(=\gamma\sin\Omega),$$

où a est le demi-grand axe, λ la longitude moyenne, e l'excentricité, ϖ la longitude du périhélie, γ le sinus de la demi-inclinaison et Ω la longitude du nœud ascendant. Elles ont été transformées en coordonnées rectangulaires héliocentriques avant le calcul des éphémérides Tchebychev BDL82. Les coordonnées rectangulaires barycentriques du Soleil sont déduites de la solution planétaire VSOP82 en utilisant le système des masses recommandé par l'Union Astronomique Internationale (UAI, 1977).

Les variables écliptiques de la Lune ELP 2000–82, longitude $V+\delta V$, latitude $U+\delta U$ et distance à la Terre Δ, ont été transformées en coordonnées rectangulaires géocentriques avant le calcul des éphémérides Tchebychev BDL82. De plus, la valeur de Δ a été préalablement corrigée du rapport des demi-grands axes $a^*_{ELP}/\,a_{ELP}$ (*cf.* 8.2.4.2) en tenant compte de la valeur du rapport des masses Lune/Terre recommandée par l'Union Astronomique Internationale :

$$\begin{aligned} a^*_{ELP} &= 384\,747.980\,645 \text{ km} \\ a_{ELP} &= 384\,747.980\,674 \text{ km}. \end{aligned} \tag{9.2.9}$$

Les coordonnées équatoriales barycentriques de Pluton (DE200) et héliocentriques des petites planètes Cérès, Pallas, Junon et Vesta (CPJV) ont été également converties en coordonnées rectangulaires écliptiques héliocentriques (repère de VSOP82) avant le calcul des éphémérides Tchebychev BDL82.

9.2.2.5. Paramètres de représentation

Les éphémérides Tchebychev BDL82 ont été construites de manière à conserver la précision des sources utilisées. La table 9.2.2 donne les paramètres de représentation choisis pour le calcul.

Table 9.2.2. Paramètres de représentation des éphémérides Tchebychev BDL82.

Δt : taille des intervalles de temps.
N : nombre de coefficients de Tchebychev utilisés.
p : précision de représentation des sources par les éphémérides Tchebychev BDL82.

Corps	Sources	Δt (j)	N	p
Lune	ELP 2000–82	8	15	$0''.0001$
Mercure	VSOP82	8	12	$0''.0001$
Vénus	VSOP82	32	9	$0''.0005$
Barycentre Terre-Lune	VSOP82	16	7	$0''.0005$
Mars	VSOP82	32	8	$0''.0005$
Jupiter	VSOP82	32	6	$0''.0010$
Saturne	VSOP82	32	6	$0''.0010$
Uranus	VSOP82	32	6	$0''.0010$
Neptune	VSOP82	32	6	$0''.0010$
Pluton	DE200	32	6	10^{-8} ua
Cérès	CPJV	32	7	10^{-7} ua
Pallas	CPJV	32	7	10^{-8} ua
Junon	CPJV	32	7	10^{-9} ua
Vesta	CPJV	32	7	10^{-10}ua

9.2.3. Éphémérides de la Connaissance des Temps

9.2.3.1. Éphémérides publiées pour le Soleil, la Lune et les planètes

Les éphémérides du Soleil, de la Lune et des planètes publiées dans la *Connaissance des Temps* sont issues des éphémérides Tchebychev BDL82 décrites dans le paragraphe précédent. Elles se présentent également sous la forme de tables de coefficients de Tchebychev et se répartissent en quatre types d'éphémérides :

Éphémérides liées aux systèmes de coordonnées

temps sidéral vrai,
nutation en longitude et en obliquité,
constantes pour la correction d'aberration des fixes.

Éphémérides du Soleil

longitude et latitude géocentriques moyennes J2000 et rayon vecteur géométrique,
ascension droite et déclinaison apparentes et temps de passage au méridien origine,
coordonnées rectangulaires équatoriales moyennes J2000.

Éphémérides de la Lune

ascension droite et déclinaison apparentes et distance à la Terre géométrique.

Éphémérides des planètes

– pour Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune
  longitude et latitude héliocentriques moyennes J2000 et rayon vecteur géométrique,
  ascension droite et déclinaison apparentes et distance à la Terre géométrique ;
– pour Pluton, Cérès, Pallas, Junon et Vesta
  ascension droite et déclinaison astrométriques J2000 et distance à la Terre géométrique.

9.2.3.2. Échelle de temps

Le temps utilisé dans les éphémérides de la *Connaissance des Temps* est le Temps terrestre TT relié au Temps atomique international TAI par (9.2.5).

Sa différence avec le Temps universel UT1 est notée ΔT :

$$\Delta T = (\mathrm{TAI} + 32.184\,\mathrm{s}) - \mathrm{UT1}. \tag{9.2.10}$$

Elle remplace l'expression autrefois utilisée : $\Delta T = \mathrm{TE} - \mathrm{TU}$. Cette différence dépend des irrégularités de la rotation de la Terre et n'est connue qu'après observation des mouvements diurnes des corps célestes et connaissance du déplacement du pôle céleste par rapport au pôle terrestre.

Compte tenu de l'impossibilité de prévoir cette différence, le méridien origine utilisé pour les éphémérides faisant intervenir la longitude d'un lieu sur la Terre est le *méridien des éphémérides* qui est situé à $-1.002\,7379\ \Delta T$ par rapport à celui de Greenwich, les longitudes étant comptées positivement à l'ouest et négativement à l'est (*cf.* 4.5.2.1).

9.2.3.3. Système de référence

L'origine et le plan de référence des coordonnées des éphémérides de la *Connaissance des Temps* sont définis par les positions et mouvements propres des étoiles du catalogue fondamental FK5 (Fricke et al., 1988) conformément aux recommandations de l'Union Astronomique Internationale (UAI, 1977). Les éphémérides Tchebychev BDL82 étant rapportées au repère de VSOP82, le passage au repère du FK5 est donné par les relations suivantes (*cf.* 4.2.5) :

$$\begin{aligned} \gamma_{FK5}\,\gamma_{VSOP82} &= -0''.0990 \\ \varepsilon_{VSOP82} &= 23°26'21''.4091. \end{aligned} \tag{9.2.11}$$

La précession des pôles de l'écliptique et de l'équateur céleste est calculée en utilisant le formulaire établi par Lieske et al. (1977) présenté au paragraphe 5.5.4. La valeur de l'obliquité moyenne en J2000 est :

$$\varepsilon_{UAI} = 23°26'21''.448. \tag{9.2.12}$$

Notons que le formulaire de Lieske est issu de la théorie du Soleil de Newcomb (1894). L'utilisation du formulaire issu des théories du Bureau des longitudes présenté au paragraphe 5.5.2 conduirait à des différences de l'ordre de $0''.001$ par siècle sur les coordonnées équatoriales.

9.2.3.4. Temps sidéral et nutation

Pour éviter une discontinuité dans la valeur et la variation linéaire du Temps universel UT1 avec l'introduction du repère lié au catalogue FK5 à partir de 1984, l'expression du temps sidéral moyen à Greenwich GMST (Greenwich Mean Sideral Time) de Newcomb est remplacée par celle de Aoki et al. (1982) :

$$\mathrm{GMST}\ 0\,\mathrm{h}\ \mathrm{UT1} = 24\,110.548\,41\,\mathrm{s} + 8\,640\,184.812\,866\,\mathrm{s}\ T'_U + 0.093\,104\,\mathrm{s}\ {T'_U}^2 - 6.2\times10^{-6}\mathrm{s}\ {T'_U}^3 \tag{9.2.13}$$

où T'_U est le Temps universel compté en siècle julien (36 525 jours) à partir du 1 janvier 2000 à 12 h UT1 avec les valeurs $\pm0.5/36\,525$, $\pm1.5/36\,525$, $\cdots$. Cette équation exprime aussi la valeur du temps sidéral moyen à 0 h TT au méridien des éphémérides en substituant au Temps universel le Temps terrestre $\mathrm{TT} = \mathrm{TAI} + 32.184\,\mathrm{s}$.

La théorie de la nutation utilisée dans les éphémérides de la *Connaissance des Temps* est celle de Wahr (1981) adoptée par l'Union Astronomique Internationale en 1980 (UAI, 1980) et présentée au paragraphe 5.6.2.

Connaissant l'obliquité moyenne de la date ε_A et la nutation en longitude $\Delta\Psi$ et en obliquité $\Delta\varepsilon$, on en déduit le temps sidéral vrai à Greenwich GST (Greenwich Sideral Time) par la formule :

$$\mathrm{GST} = \mathrm{GMST} + \Delta\Psi\cos(\varepsilon_A + \Delta_\varepsilon). \tag{9.2.14}$$

Le temps sidéral vrai à Greenwich GST ainsi que la nutation en longitude $\Delta\Psi$ et en obliquité $\Delta\varepsilon$ sont publiés sous forme d'éphémérides Tchebychev dans la *Connaissance des Temps*.

9.2.3.5. Correction de l'aberration des fixes

La Connaissance des Temps publie les quantités C, c, D, d définies par :

$$\begin{aligned} C &= C' - \mathrm{c} \quad \text{avec : } C' = y'\tau_A \quad \text{et} \quad \mathrm{c} = -k_A\ e\cos\varpi\cos\varepsilon_A \\ D &= D' - \mathrm{d} \quad \text{avec : } D' = -x'\tau_A \quad \text{et} \quad \mathrm{d} = -k_A\ e\sin\varpi, \end{aligned} \tag{9.2.15}$$

où :
x' et y' sont les composantes cartésiennes de la vitesse de la Terre par rapport au barycentre du système solaire dans l'équateur de la date (unité : ua/j),
τ_A est le temps de lumière pour une unité astronomique ($\tau_A = 0.005\,775\,5183$ j),
κ_A est la constante de l'aberration du Soleil ($\kappa_A = 20''.495\,52$),
ε_A est l'obliquité moyenne de la date,
e est l'excentricité de l'orbite terrestre et ϖ la longitude du périgée du Soleil avec :

$$\begin{aligned} e\cos\varpi &= 0.003\,740\,8165 + 0.004\,793\,1064\,t - 0.000\,281\,1275\,t^2 \\ e\sin\varpi &= -0.016\,284\,4766 + 0.001\,532\,3789\,t + 0.000\,720\,1706\,t^2, \end{aligned} \tag{9.2.16}$$

d'après les éléments moyens du barycentre Terre-Lune VSOP82 où le temps t est compté à partir de J2000 et exprimé en milliers d'années juliennes (365 250 jours).

Les quantités C et D sont publiées sous forme d'éphémérides Tchebychev dans la *Connaissance des Temps*. Pour les quantités c et d, on donne des valeurs annuelles.

Dans les catalogues d'étoiles antérieurs au FK5, les positions moyennes des étoiles sont déjà corrigées des termes en excentricité c et d et pour passer des coordonnées vraies d'une étoile (α_v, δ_v) à ses coordonnées apparentes (α_a, δ_a), on applique les formules :

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \alpha_v + [D \sin \alpha_v + C \cos \alpha_v] \frac{1}{\cos \delta_v} \\ \delta_a &= \delta_v + D \cos \alpha_v \sin \delta_v + C[\tan(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon) \cos \delta_v - \sin \alpha_v \sin \delta_v]. \end{aligned} \tag{9.2.17}$$

où ε_A désigne l'obliquité moyenne et $\Delta\varepsilon$ la nutation en obliquité.

Par contre, les positions moyennes des étoiles du FK5 ne sont pas corrigées des termes en excentricité selon les recommandations de l'Union Astronomique Internationale (UAI, 1977) et les positions apparentes (α_a, δ_a) se calculent à partir des positions vraies (α_v, δ_v) avec les formules :

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \alpha_v + [D' \sin \alpha_v + C' \cos \alpha_v] \frac{1}{\cos \delta_v} \\ \delta_a &= \delta_v + D' \cos \alpha_v \sin \delta_v + C'[\tan(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon) \cos \delta_v - \sin \alpha_v \sin \delta_v]. \end{aligned} \tag{9.2.18}$$

9.2.3.6. Calcul des coordonnées

Les positions des corps publiées dans les éphémérides Tchebychev de la *Connaissance des Temps* sont obtenues par calcul vectoriel et matriciel.

Soit $\mathbf{V}$ le vecteur colonne représentant les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un corps dans un repère. Le plan défini par les axes Ox et Oy est le plan de référence des coordonnées, équateur céleste ou écliptique, l'axe Ox étant orienté vers l'équinoxe. Soit $\mathbf{V}'$ le vecteur colonne obtenu après rotation du repère d'un angle α autour de l'un des trois axes dans le sens direct. $\mathbf{V}'$ se déduit de $\mathbf{V}$ par la relation matricielle :

$$\mathbf{V}' = R_i(\alpha)\mathbf{V}, \tag{9.2.19}$$

les expressions des matrices $R_1(\alpha)$, $R_2(\alpha)$, $R_3(\alpha)$ sont données au paragraphe (4.5.1.2) et correspondent respectivement aux rotations autour des axes Ox, Oy et Oz.

En substituant le temps dans les éphémérides Tchebychev BDL82 on obtient des coordonnées rectangulaires géométriques. Elles sont barycentriques pour le Soleil, géocentriques pour la Lune et héliocentriques pour les planètes et le barycentre Terre-Lune. Les autres types de coordonnées nécessaires au calcul des éphémérides de la *Connaissance des Temps* se déduisent des premières par addition vectorielle. En particulier, les coordonnées géocentriques du Soleil $\mathbf{V_S}$ se calculent à partir de la Lune géocentrique $\mathbf{V_L}$ et du barycentre Terre-Lune héliocentrique $\mathbf{V_{TL}}$ en utilisant le rapport μ des masses Lune/Terre :

$$\mathbf{V_S} = -\mathbf{V_{TL}} + \mu/(1+\mu)\mathbf{V_L} \quad \text{avec} \quad \mu = 0.012\,300\,02. \tag{9.2.20}$$

9.2.3.7. Coordonnées moyennes J2000

Soit $\mathbf{V_0}$ le vecteur représentant les coordonnées rectangulaires calculées en substituant le temps dans les éphémérides Tchebychev BDL82 (repère de VSOP82). Soit $\mathbf{V_1}$ le vecteur représentant les coordonnées rectangulaires équatoriales moyennes J2000, x_1, y_1, z_1, du corps dans le repère du FK5 ; $\mathbf{V_1}$ se déduit de $\mathbf{V_0}$ en utilisant les relations 9.2.11 :

$$\mathbf{V_1} = R_3(0''.0990)\, R_1(-23°26'21''.4091)\, \mathbf{V_0}. \tag{9.2.21}$$

C'est ainsi que sont calculées les coordonnées rectangulaires du Soleil (équinoxe et équateur moyens J2000) présentées sous forme d'éphémérides Tchebychev dans la *Connaissance des Temps.*

Soit $\mathbf{V_2}$ le vecteur représentant les coordonnées rectangulaires écliptiques moyennes J2000, x_2, y_2, z_2, du corps ; $\mathbf{V_2}$ se déduit de $\mathbf{V_1}$ en utilisant l'obliquité J2000 recommandée par l'Union Astronomique Internationale ε_{UAI} :

$$\mathbf{V_2} = R_1(23°26'21''.448)\, \mathbf{V_1}. \tag{9.2.22}$$

Les coordonnées écliptiques moyennes du Soleil et des planètes principales (équinoxe et écliptique moyens J2000) présentées sous forme d'éphémérides Tchebychev dans la *Connaissance des Temps* se déduisent de $\mathbf{V_2}$ par les relations

$$\begin{aligned} &\text{longitude :} && \lambda = \arctan(y_2/x_2), \\ &\text{latitude :} && \beta = \arctan\,[z_2/(x_2^2 + y_2^2)^{1/2}], \\ &\text{rayon vecteur :} && r = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{9.2.23}$$

Notons que les coordonnées écliptiques ainsi calculées diffèrent des coordonnées écliptiques directement issues des éphémérides Tchebychev BDL82 d'un écart qui peut atteindre $0''.039$ en latitude.

9.2.3.8. Coordonnées apparentes et astrométriques

Calcul du temps de lumière

Pour calculer des coordonnées apparentes et astrométriques d'un corps, il faut tout d'abord déterminer le temps de lumière τ entre le corps concerné et la Terre. Soient $\mathbf{V_C}$ et $\mathbf{V_T}$ les vecteurs représentant les coordonnées barycentriques rectangulaires du corps et de la Terre rapportées à l'équinoxe et à l'équateur moyens J2000 exprimées en unités astronomiques. Le temps de lumière τ à l'instant t peut s'écrire :

$$\tau = \mid \mathbf{V_C}(t - \tau) - \mathbf{V_T}(t) \mid \tau_A. \tag{9.2.24}$$

où τ_A est le temps de lumière pour une unité astronomique ($\tau_A = 0.005\,775\,5183$ j). Pour déterminer la valeur de τ, on pose tout d'abord :

$\tau_0 = \mid \mathbf{V_C}(t) - \mathbf{V_T}(t) \mid \tau_A$, puis on calcule par itération :
$\tau_n = \mid \mathbf{V_C}(t - \tau_{n-1}) - \mathbf{V_T}(t) \mid \tau_A$, jusqu'à ce qu'on obtienne la précision désirée ($n = 1, 2, \cdots$).

En pratique, deux itérations suffisent pour la précision des éphémérides de la *Connaissance des Temps.*

Coordonnées apparentes

Soit $\mathbf{V_3}$ le vecteur représentant les coordonnées rectangulaires géocentriques équatoriales moyennes J2000 du corps corrigées de l'aberration de la lumière (*cf.* 7.2.2.3) ; $\mathbf{V_3}$ se déduit de $\mathbf{V_C}$ et $\mathbf{V_T}$ par la relation :

$$\mathbf{V_3} = \mathbf{V_C}(t - \tau) - \mathbf{V_T}(t) + \tau \mathbf{W_T}(t), \tag{9.2.25}$$

où $\mathbf{W_T}$ est le vecteur représentant les composantes rectangulaires barycentriques de la vitesse de la Terre rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens J2000.

Soit $\mathbf{V_4}$ le vecteur représentant les coordonnées rectangulaires géocentriques équatoriales apparentes x_4, y_4, z_4. Après correction de la précession avec les quantités ζ_A, θ_A, z_A définies au paragraphe 5.5.2 et de la nutation avec les quantités ε_A, $\Delta\Psi$, $\Delta\epsilon$ définies au paragraphe 5.6.1, $\mathbf{V_4}$ se déduit de $\mathbf{V_3}$ par la relation :

$$\mathbf{V_4} = R_1\left(-\varepsilon_A - \Delta_\varepsilon\right)\, R_3\left(-\Delta_\Psi\right)\, R_1\left(\epsilon_A\right)\, R_3\left(-90^\circ - z_A\right)\, R_1\left(\theta_A\right)\, R_3\left(90^\circ - \zeta_A\right)\, \mathbf{V_3}. \tag{9.2.26}$$

Les coordonnées équatoriales apparentes du Soleil, de la Lune et des planètes principales présentées sous forme d'éphémérides Tchebychev dans la *Connaissance des Temps* se déduisent de $\mathbf{V_4}$ par les relations

$$\begin{aligned} &\text{ascension droite apparente :} && \alpha = \arctan(y_4/x_4),\\ &\text{déclinaison apparente :} && \delta = \arctan\left[z_4/(x_4^2 + y_4^2)^{1/2}\right],\\ &\text{distance à la Terre géométrique :} && \Delta = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{9.2.27}$$

Remarque :

Cette méthode ne tient pas compte des termes relativistes de l'aberration qui sont de l'ordre de $0''.001$. De même, la déviation relativiste des rayons lumineux dans le champ gravitationnel du Soleil est ignorée, les variations angulaires produites par ce phénomène étant difficilement représentables dans une éphéméride Tchebychev. La valeur de cette déviation peut être dans certains cas de l'ordre de la seconde de degré.

Coordonnées astrométriques

Soit $\mathbf{V_5}$ le vecteur représentant les coordonnées astrométriques J2000, x_5, y_5, z_5, du corps (*cf.* 7.2.2.4) ; $\mathbf{V_5}$ se déduit de $\mathbf{V_C}$ et $\mathbf{V_T}$ par la relation :

$$\mathbf{V_5} = \mathbf{V_C}(t - \tau) - \mathbf{V_T}(t). \tag{9.2.28}$$

Les coordonnées équatoriales astrométriques J2000 de Pluton et des petites planètes Cérès, Pallas, Junon et Vesta présentées sous forme d'éphémérides Tchebychev dans la *Connaissance des Temps* se déduisent de $\mathbf{V_5}$ par les relations

$$\begin{aligned} &\text{ascension droite astrométrique :} && \alpha = \arctan(y_5/x_5),\\ &\text{déclinaison astrométrique :} && \delta = \arctan\left[z_5/(x_5^2 + y_5^2)^{1/2}\right],\\ &\text{distance à la Terre géométrique :} && \Delta = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{9.2.29}$$

Remarque :

Ce calcul suit la décision prise par l'Union Astronomique Internationale en 1977 et prenant effet à partir de 1984. Autrefois, les ascensions droites et déclinaisons astrométriques contenaient les termes en excentricité de l'aberration des fixes, de même que les ascensions droites et déclinaisons des étoiles fournies par les catalogues antérieurs au FK5. Dans certains ouvrages, le terme *astrométrique* est réservé aux coordonnées calculées avec l'ancienne méthode et le terme *astrographique* désigne les coordonnées calculées à partir de 1984 (*cf.* 7.2.2.4).

9.2.3.9. Temps de passage du Soleil

Pour calculer les temps de passage dans l'échelle TT du Soleil au méridien des éphémérides pour tous les jours compris entre la date t_1 à 0 h et la date t_2 à 0 h, on définit la variable temporelle :

$$t = t_1 + k + 0.5 \quad \text{où } k \text{ est le numéro du jour dans l'intervalle } [t_1,\ t_2]$$

avec :

$$0 \leq k < K \quad (K : \text{nombre de jours de l'intervalle}).$$

Connaissant l'équation du temps E = temps solaire moyen − temps solaire vrai, exprimée en jour, les temps de passage du Soleil $T_p(t)$ pour les K jours de l'intervalle $[t_1,\ t_2]$ peuvent se calculer ainsi :

$$T_p(t) = t + E\,[T_p(t)]. \tag{9.2.30}$$

En première approximation, on a :

$$T_p(t) = t + E\,(t).$$

Si E' et E'' représentent la dérivée première et seconde de E, on obtient par développement de Taylor :

$$T_p(t) = t + E\,[t + E\,(t)] = t + E\,(t) + E'(t)E\,(t),$$

puis :

$$T_p(t) = t + E\,[t + E\,(t) + E'(t)E\,(t)],$$
$$T_p(t) = t + E\,(t) + E'(t)E\,(t) + E'(t)^2 E\,(t) + 0.5E''(t)E\,(t)^2,$$

en négligeant les termes d'ordre 3 qui sont inférieurs à 10^{-5} seconde.

C'est ainsi que sont calculés les temps de passage du Soleil au méridien des éphémérides sous forme d'éphémérides Tchebychev dans la *Connaissance des Temps.*

9.2.3.10. Paramètres de représentation

Nous donnons dans les tables 9.2.3 à 9.2.10 les valeurs des paramètres de représentation des éphémérides Tchebychev du Soleil, de la Lune et des planètes de la *Connaissance des Temps* :
- le nombre de coefficients de Tchebychev NC,
- la taille des intervalles de temps DT exprimée en jours,
- l'unité des coefficients de Tchebychev,
- la précision de représentation des éphémérides Tchebychev de la *Connaissance des Temps.*

Notons que pour des raisons liées à la nature des coordonnées représentées et à la taille de la publication, la précision de représentation des éphémérides Tchebychev de la *Connaissance des*

Temps a une qualité inférieure à celle des éphémérides Tchebychev BDL82 dont le rôle est de se substituer aux sources des éphémérides sur une longue période de temps.

Table 9.2.3. Paramètres de représentation des éphémérides liées aux systèmes de coordonnées.

SYSTÈMES DE COORDONNÉES	NC	*DT*	Unité	Précision
Temps sidéral	9	18	heure	0.0005 s
Nutation en longitude et en obliquité	9	18	seconde de degré	$0''.01$
Constantes d'aberration des fixes	6	33	seconde de degré	$0''.005$

Table 9.2.4. Paramètres de représentation des éphémérides du Soleil.

SOLEIL	NC	*DT*	Unité	Précision
Longitude moyenne J2000	11	33	degré	10^{-5} degré
Latitude moyenne J2000	11	33	degré	10^{-5} degré
Rayon vecteur géométrique	11	33	ua	2×10^{-7} ua
Ascension droite apparente	10	33	heure	0.01 s
Déclinaison apparente	10	33	degré	$0''.1$
Temps de passage	10	33	heure	0.01 s
Coordonnées rectangulaires J2000	11	33	ua	2×10^{-7} ua

Table 9.2.5. Paramètres de représentation des éphémérides de la Lune.

LUNE	NC	*DT*	Unité	Précision
Ascension droite apparente	9	4	heure	0.001 s
Déclinaison apparente	9	4	degré	$0''.02$
Distance à la Terre géométrique	9	4	km	0.003 km

Table 9.2.6. Paramètres de représentation des éphémérides de Mercure.

MERCURE	NC	*DT*	Unité	Précision
Longitude moyenne J2000	15	33	degré	10^{-5} degré
Latitude moyenne J2000	15	33	degré	10^{-5} degré
Rayon vecteur géométrique	15	33	ua	10^{-6} ua
Ascension droite apparente	15	33	heure	0.05 s
Déclinaison apparente	15	33	degré	$0''.5$
Distance à la Terre géométrique	15	33	ua	2×10^{-6} ua

Table 9.2.7. Paramètres de représentation des éphémérides de Vénus.

VÉNUS	NC	*DT*	Unité	Précision
Longitude moyenne J2000	10	94	degré	10^{-5} degré
Latitude moyenne J2000	10	94	degré	10^{-5} degré
Rayon vecteur géométrique	10	94	ua	10^{-6} ua
Ascension droite apparente	10	33	heure	0.01 s
Déclinaison apparente	10	33	degré	$0''.1$
Distance à la Terre géométrique	10	33	ua	10^{-6} ua

Table 9.2.8. Paramètres de représentation des éphémérides de Mars.

MARS	NC	*DT*	Unité	Précision
Longitude moyenne J2000	10	186	degré	10^{-5} degré
Latitude moyenne J2000	10	186	degré	10^{-5} degré
Rayon vecteur géométrique	10	186	ua	10^{-6} ua
Ascension droite apparente	10	33	heure	0.02 s
Déclinaison apparente	10	33	degré	$0''.1$
Distance à la Terre géométrique	10	33	ua	10^{-6} ua

Table 9.2.9. Paramètres de représentation des éphémérides de Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune.

JUPITER, SATURNE URANUS, NEPTUNE	NC	*DT*	Unité	Précision
Longitude moyenne J2000	6	368	degré	10^{-5} degré
Latitude moyenne J2000	6	368	degré	10^{-5} degré
Rayon vecteur géométrique	6	368	ua	10^{-6} ua
Ascension droite apparente	10	33	heure	0.01 s
Déclinaison apparente	10	33	degré	$0''.1$
Distance à la Terre géométrique	10	33	ua	10^{-6} ua

Table 9.2.10. Paramètres de représentation des éphémérides de Pluton, Cérès, Pallas, Junon, Vesta.

PLUTON, CÉRÈS, PALLAS JUNON, VESTA	NC	*DT*	Unité	Précision
Ascension droite astrométrique J2000	8	33	heure	0.01 s
Déclinaison astrométrique J2000	8	33	degré	$0''.1$
Distance à la Terre géométrique	8	33	ua	10^{-6}ua

9.3. ÉPHÉMÉRIDES DES SATELLITES NATURELS DES PLANÈTES

9.3.1. Sources des éphémérides

Les éphémérides des satellites naturels des planètes publiées dans la *Connaissance des Temps* sont issues de théories analytiques ou semi-analytiques de sources diverses,

– satellites de Mars : théorie de Chapront-Touzé ajustée sur des observations visuelles, photographiques, CCD et spatiales réalisées entre 1877 et 1988 (Chapront-Touzé, 1990) ;

– satellites galiléens de Jupiter : théorie de Sampson (1921) améliorée et reprogrammée par Lieske (Lieske, 1977), ajustée exclusivement sur des observations photographiques effectuées entre 1891 et 1978 (Arlot, 1982) ;

– huit premiers satellites de Saturne : théorie issue des travaux de Struve (1930), Kozai (1959), Rapaport (1977) et Dourneau (1987), ajustée sur des observations visuelles et photographiques réalisées entre 1886 et 1985 ;

– cinq principaux satellites d'Uranus : théorie de Laskar et Jacobson (1987) ajustée sur des observations visuelles, photographiques et spatiales réalisées entre 1911 et 1986.

Ces théories sont décrites dans les paragraphes 8.3, 8.4, 8.6 et 8.7.

9.3.2. Échelle de temps

L'argument temporel utilisé dans les théories et dans les éphémérides est le temps uniforme de la mécanique céleste représenté jusqu'à récemment par le Temps des éphémérides TE et que l'on confond désormais avec le Temps terrestre TT. Il convient d'effectuer la correction qui permet de se ramener au Temps universel coordonné (UTC) qui est le temps des observateurs.

9.3.3. Calcul des coordonnées

Les théories du mouvement des satellites naturels des planètes utilisées fournissent, pour un instant donné, les coordonnées cartésiennes de chaque satellite dans un repère équatorial céleste moyen 1950 lié au FK4, dont le centre est situé au centre de masse de la planète du système. Les coordonnées publiées dans la *Connaissance des Temps* étant des coordonnées géocentriques tangentielles J2000 liées au FK5, des changements de repère ont dû être effectués : dans un premier temps, le repère est ramené au repère du FK5 et rapporté au centre de la Terre par l'intermédiaire de l'éphéméride BDL82 de la Terre et de la planète concernée. On passe ensuite au repère tangentiel géocentrique centré sur la planète concernée et on obtient deux coordonnées tangentielles X et Y relatives à la planète, directement comparables aux observations (*cf.* 4.3.3). On a de plus effectué la correction du temps de lumière et les coordonnées peuvent être considérées comme astrographiques.

9.3.4. Précision des éphémérides

La précision des éphémérides publiées dans la Connaissance des Temps dépend de trois précisions différentes :

– la précision interne de la théorie utilisée, qui dépend de l'importance des termes des séries négligés et qui peut être évaluée à l'aide d'une comparaison à une intégration numérique. La précision interne est en général la meilleure des trois ;

– la précision externe de la théorie utilisée qui dépend de la précision des observations utilisées pour l'ajustement des constantes d'intégration de cette théorie et aussi de la répartition des observations au cours du temps. C'est la précision externe qui limite la précision globale des éphémérides ;

– la précision de la représentation que l'on choisit en ajustant le nombre de coefficients et la longueur des intervalles de validité. Pour un satellite donné l'intervalle de validité de la représentation est constant. La table 9.3.1 donne une limite supérieure de la précision de la représentation qui n'est atteinte que pour un petit nombre d'intervalles. Cette précision est la seule que l'on puisse choisir et ne dégrade pas la précision globale.

9.3.5. Représentation des éphémérides des satellites naturels des planètes

Les éphémérides des satellites naturels des planètes sont représentées sous forme de fonctions mixtes du temps (*cf.* 9.1.4). On écrit :

$$\left.\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right\} = A_0 + A_1 u + B_0 \sin(Nu + F_0) + B_1 u \sin(Nu + F_1) + B_2 u^2 \sin(Nu + F_2) + C_0 \sin(2Nu + P_0)$$

où

$u = t - t_0$ (t date de calcul et t_0, date de début de l'intervalle),

N = fréquence associée au satellite considéré,

$A_0,\ A_1,\ B_0,\ B_1,\ B_2,\ C_0,\ F_0,\ F_1,\ F_2,\ P_0$ sont des coefficients numériques valables dans l'intervalle spécifié, contenant t.

La table 9.3.2 donne, pour chaque satellite, le nombre de coefficients nécessaires, la durée d'un intervalle de validité pour l'année 1998 (notons que cet intervalle peut varier d'une année à l'autre afin de conserver la même précision) et la valeur de la fréquence associée.

Le paragraphe 9.4.2 explicitera l'utilisation de ces éphémérides.

Table 9.3.1. Précisions des éphémérides des satellites naturels des planètes.

	Précisions en seconde de degré		
	interne	externe (estimation)	de la représentation
Satellites de Mars			
Phobos	0.0005	0.02	0.007
Déimos	0.003	0.06	0.007
Satellites de Jupiter			
Io	0.003	0.09	0.005
Europe	0.003	0.10	0.009
Ganymède	0.003	0.10	0.004
Callisto	0.003	0.13	0.002
Satellites de Saturne			
Mimas	0.200	0.18	0.015
Encelade	0.027	0.15	0.009
Téthys	0.048	0.15	0.001
Dioné	0.055	0.15	0.002
Rhéa	0.060	0.12	0.003
Titan	0.060	0.13	0.016
Hypérion		0.20	0.007
Japet	0.017	0.19	0.008
Satellites d'Uranus			
Miranda	0.001	0.13	0.006
Ariel	0.001	0.13	0.006
Umbriel	0.003	0.13	0.010
Titania	0.007	0.13	0.008
Obéron	0.007	0.13	0.008

Table 9.3.2. Paramètres de représentation des éphémérides des satellites naturels des planètes.

	Nombre de coefficients		Durée de l'intervalle de validité pour 1998	Valeur de la fréquence associée
	pour X	pour Y	(jours)	(radians/jour)
Satellites de Mars				
Phobos	10	10	7	19.7027
Déimos	10	10	7	4.9788
Satellites de Jupiter				
Io	10	8	3	3.5516
Europe	10	8	4	1.7693
Ganymède	10	8	9	0.8782
Callisto	8	8	10	0.3765
Satellites de Saturne				
Mimas	10	10	4	6.6670
Encelade	10	10	16	4.5860
Téthys	10	10	16	3.3280
Dioné	10	10	16	2.2960
Rhéa	10	10	16	1.3910
Titan	8	8	11	0.3940
Hypérion	8	8	8	0.3940
Japet	6	6	16	0.0790
Satellites d'Uranus				
Miranda	10	10	9	4.4880
Ariel	10	10	31	2.4930
Umbriel	10	10	27	1.5162
Titania	10	10	17	0.7217
Obéron	10	10	22	0.4667

9.4. UTILISATION DES ÉPHÉMÉRIDES

9.4.1. Description des éphémérides publiées dans la Connaissance des Temps

Caractéristiques générales

Les éphémérides de l'année sont publiées corps par corps. Pour chaque corps, on compte un certain nombre de variables qui, pour des intervalles de temps donnés, sont représentées par des tableaux donnant les coefficients de leurs développements en polynômes de Tchebychev (*cf.* 9.1.3) ou sous forme de fonctions mixtes (*cf.* 9.1.4).

En haut de chaque page on trouve :

– le nom du corps concerné suivi de l'année de l'éphéméride ;
– le type des variables représentées ;
– éventuellement, les caractéristiques du système de coordonnées.

En bas de chaque page on trouve les unités utilisées.

Les coefficients d'un tableau sont publiés en colonne. Pour chaque tableau on précise :

– le nom de la variable représentée ;
– les dates de début et de fin de l'intervalle de temps correspondant au domaine de validité du tableau.

Soleil, Lune, planètes principales, petites planètes

– la longueur des intervalles de temps DT (en jours) figure en haut de chaque page ;
– les coefficients sont notés $0, 1, \ldots, p, \ldots, n$;
– la *valeur de contrôle* du tableau, imprimée en italique, figure en tête de chaque tableau. C'est la valeur $y(t_0)$ de la variable y représentée par le tableau, pour t_0 début de l'intervalle de temps t_0, $t_0 + DT$. On a $y(t_0) = a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^n a_n$. La valeur de contrôle permet de vérifier que les coefficients ont été correctement entrés en mémoire sur une calculette ou un calculateur. De plus, l'ensemble des valeurs de contrôle des tableaux pour une même variable donne une idée de l'évolution de cette variable au cours de l'année.

Satellites

– la valeur de la fréquence N (en radians par jour) associée au satellite figure en haut de chaque page ;
– les coefficients sont notés $A0, A1, B0, F0, B1, F1, B2, F2, C0, P0$. Pour quelques satellites certains coefficients ne sont pas donnés car ils sont nuls.
– $A0, B0, C0$ sont exprimés en secondes de degré ;
– $A1, B1$ sont exprimés en secondes de degré par jour ;
– $B2$ est exprimé en secondes de degré par $(\text{jour})^2$;
– $F0, F1, F2, P0$ sont exprimés en radians.

Phénomènes des satellites galiléens

La *Connaissance des Temps* donne également les prédictions des phénomènes des satellites galiléens de Jupiter, sous forme de tables suivant une représentation polynomiale en fonction d'une variable temporelle (*cf.* 9.4.4). Les phénomènes sont notés :
– PA.D et PA.F (débuts et fins de passages),
– OM.D et OM.F (débuts et fins d'ombres),
– OC.D et OC.F (débuts et fins d'occultations),
– EC.D et EC.F (débuts et fins d'éclipses).

9.4.2. Calcul d'une coordonnée

Pour calculer la valeur d'une coordonnée d'un astre pour une date t exprimée en UTC, on commence par :

– effectuer, sur t, une correction déduite de la table 3.2 afin de se ramener à l'argument des éphémérides (identifié à $\mathrm{TT} = \mathrm{TAI} + 32.184\,\mathrm{s}$) ;

– chercher, parmi les tableaux représentant la coordonnée, celui qui correspond à l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + DT]$ dans lequel se trouve t. Il faut insister sur le fait que la représentation, qu'elle soit en polynômes de Tchebychev ou sous forme de fonctions mixtes, n'est pas valable en dehors de l'intervalle $[t_0, t_0 + DT]$.

Le calcul se poursuit de la manière suivante.

Soleil, Lune, planètes principales, petites planètes

À partir des $n+1$ coefficients du tableau $a_0, a_1, \cdots, a_p, \cdots, a_n$ (notés $0, 1, \cdots p, \cdots, n$), on calcule la coordonnée $y(t)$ par la formule :

$$y = a_0 + a_1 T_1(x) + \ldots + a_n T_n(x), \tag{9.4.1}$$

où :

$$x = -1 + \frac{2(t - t_0)}{DT}. \tag{9.4.2}$$

Les polynômes de Tchebychev $T_p(x)$ se calculent (*cf.* 9.1.3),

– soit par la formule suivante, déduite de (9.1.11) :

$$T_p(x) = \cos p\theta, \text{ où } \theta = \arccos x, \tag{9.4.3}$$

– soit par la relation de récurrence, déduite de (9.1.10) :

$$\begin{aligned} T_{p+1}(x) &= 2xT_p(x) - T_{p-1}(x), \\ \text{avec} \quad T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x. \end{aligned} \tag{9.4.4}$$

Notons que, si on n'utilise que les $p+1$ ($p < n$) premiers coefficients du développement en polynômes de Tchebychev, on commet, sur la représentation de y, une erreur au plus égale à la somme des valeurs absolues des $n-p$ coefficients négligés.

Pour avoir le temps de passage du Soleil au méridien origine en un jour donné, numéroté j dans le mois, on applique la même méthode en prenant $t = j + 0.5$ et $t_0 = 0$.

Satellites

À partir des coefficients du tableau $A0, A1, B0, F0, B1, F1, B2, F2, C0, P0$, on calcule les coordonnées X et Y d'un satellite pour la date t par la formule suivante déduite de (9.1.23) :

$$\begin{aligned} X \text{ ou } Y = A0 + A1\,u + B0 \sin(Nu + F0) + B1\,u \sin(Nu + F1) + B2\,u^2 \sin(Nu + F2) \\ + C0 \sin(2Nu + P0), \end{aligned} \tag{9.4.5}$$

où $u = t - t_0$; u est compté en jours.

9.4.3. Dérivées des développements

Les dérivées des coordonnées publiées dans la *Connaissance des Temps* peuvent se calculer de la façon suivante :

Soleil, Lune, planètes principales, petites planètes

Les fonctions $y(t)$ sont représentées sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + DT]$ par leur développement en polynômes de Tchebychev (9.4.1) de la variable x définie par (9.4.2).

Une bonne approximation de la dérivée de y par rapport au temps sur le même intervalle est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{DT}\big[a_1 U_0(x) + 2a_2 U_1(x) + \ldots + n a_n U_{n-1}(x)\big], \tag{9.4.6}$$

où les $U_p(x)$ sont les polynômes de Tchebychev de seconde espèce calculés,

– soit par la relation :

$$U_p(x) = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin\theta} \quad \text{où } \theta = \arccos x, \tag{9.4.7}$$

– soit par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} U_p(x) &= 2xU_{p-1}(x) - U_{p-2}(x), \\ \text{avec} \quad U_0(x) &= 1, \qquad U_1(x) = 2x. \end{aligned} \tag{9.4.8}$$

Notons que le développement (9.4.6) limité à ses deux premiers termes fournit généralement une approximation suffisante de la dérivée.

Satellites

Les dérivées par rapport au temps des coordonnées X et Y des satellites publiées dans la *Connaissance des Temps* s'obtiennent en dérivant la formule (9.4.5) :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \text{ ou } \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = A1 + NB0\cos(Nu + F0) + B1\sin(Nu + F1) + NB1\,u\cos(Nu + F1) \\ + 2B2\,u\sin(Nu + F2) + NB2\,u^2\cos(Nu + F2) + 2NC0\cos(2Nu + P0), \tag{9.4.9}$$

où $u = t - t_0$; u est compté en jours.

9.4.4. Calcul d'une date de phénomène

Les dates des phénomènes des satellites galiléens se calculent de la façon suivante (Thuillot, 1983, 1989).

Soit t une date julienne au voisinage de laquelle on désire connaître les dates des phénomènes d'un satellite galiléen ; t est exprimé en jours comptés depuis le 0 janvier à 0 h de l'année de l'éphéméride et appartient à l'intervalle $[t_0, t_0 + DT]$. Soit P la période synodique moyenne du satellite considéré. La date approchée t_1 du phénomène recherché, exprimée de la même façon que t, est donnée par la relation :

$$t_1 = kP + \tau/24 + t_0, \tag{9.4.10}$$

où,

– k représente la partie entière de la quantité $(t - t_0)/P$

– τ est donné sur l'intervalle $t_0, t_0 + DT$ par un polynôme dont les coefficients c_i sont publiés pour chaque phénomène :

$$\tau = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n, \tag{9.4.11}$$

avec,

$$x = -1 + \frac{2(t - t_0)}{DT}. \tag{9.4.12}$$

Le calcul peut ensuite être réitéré en substituant t_1 à t de façon à obtenir la convergence vers la date du phénomène avec une précision meilleure que une minute de temps.

9.4.5. Exemples

Les exemples ont été calculés sur un ordinateur avec 15 chiffres significatifs. On n'attachera pas d'importance à la dernière décimale publiée qui peut dépendre du calculateur utilisé et du déroulement des opérations. Les décimales de calcul sont quelquefois surabondantes par rapport à la précision physique recherchée. Elles ne sont conservées ici que dans le but de faciliter les contrôles.

Exemple 1. Calculer le rayon vecteur héliocentrique de Mars le 5 novembre 1998 à 16 h 51 min 44 s UTC.

On effectue d'abord une correction pour se ramener à l'argument des éphémérides. Pour 1998, la valeur de TT− UTC n'est pas encore connue à la date de parution de cet ouvrage, mais on peut la prendre égale à 63 s. La date t est donc le 5 novembre 1998 à 16 h 52 min 47 s, argument des éphémérides.

On utilise les coefficients de la page B36 de la *Connaissance des Temps* 1998, valables du 0 juillet 0 h au 33 décembre 0 h :

$$\begin{array}{lll}
a_0 = 1.619\,306\,72, & a_1 = 0.064\,011\,33, & a_2 = -0.017\,614\,12, \\
a_3 = -0.001\,300\,72, & a_4 = 0.000\,218\,04, & a_5 = -0.000\,007\,45, \\
a_6 = 0.000\,000\,32, & a_7 = 0.000\,000\,15, & a_8 = -0.000\,000\,02, \\
a_9 = 0.0. & &
\end{array}$$

Le calendrier des pages B148 et B149 donne les numéros JDA des jours de l'année correspondant au 0 juillet (JDA=181) et au 5 novembre (JDA=309). On a :

$$DT = 186\,;\ t - t_0 = 309 - 181 + 16\,\text{h}\ 52\,\text{min}\ 47\,\text{s} = 128.703\,322\,\text{jours}.$$

On en déduit par la formule (9.4.2) :

$$x = -1 + \frac{2(t - t_0)}{DT} = 0.383\,906\,686.$$

On peut calculer les polynômes de Tchebychev par l'un des deux algorithmes suivants.

• Algorithme 1

Les polynômes de Tchebychev $T_p(x)$ sont calculés par la relation (9.4.3).
On a : $\theta = 67^\circ.424\,117\,27$. On en déduit :

$$\begin{array}{ll}
T_1(x) = \cos\theta = x = 0.383\,906\,686, & \\
T_2(x) = \cos 2\theta = -0.705\,231\,314, & T_3(x) = \cos 3\theta = -0.925\,392\,718, \\
T_4(x) = \cos 4\theta = -0.005\,297\,589, & T_5(x) = \cos 5\theta = 0.921\,325\,158, \\
T_6(x) = \cos 6\theta = 0.712\,703\,365, & T_7(x) = \cos 7\theta = -0.374\,101\,985, \\
T_8(x) = \cos 8\theta = -0.999\,943\,871, & T_9(x) = \cos 9\theta = -0.393\,668\,289.
\end{array}$$

• Algorithme 2

Les polynômes $T_p(x)$ sont calculés par la relation de récurrence (9.4.4).
On a : $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x = 0.383\,906\,686$. On en déduit :

$$\begin{array}{l}
T_2(x) = 2xT_1 - T_0 = -0.705\,231\,314, \\
T_3(x) = 2xT_2 - T_1 = -0.925\,392\,718, \ \text{etc.}
\end{array}$$

Les polynômes de Tchebychev $T_p(x)$ étant déterminés, le rayon vecteur R de Mars se déduit de la formule (9.4.1). On a :

$$R = 1.619\,306\,72 + 0.064\,011\,33\,T_1 + \ldots + 0.0\,T_9,$$

soit, finalement :

$$R = 1.657\,498\,98 \text{ ua.}$$

Exemple 2. Calculer la vitesse $X' = \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$, *de la coordonnée rectangulaire du Soleil* X, *le 12 janvier 1998 à 8 h 58 min 57 s* UTC.

On effectue la même correction de 63 s que dans l'exemple 1 pour se ramener à l'argument des éphémérides. La date t est donc le 12 janvier 1998 à 9 h, argument des éphémérides. On applique la méthode décrite au paragraphe 9.4.3. On utilise les coefficients de la page B16 de la *Connaissance des Temps* 1998, valables du 0 janvier à 0 h au 2 février à 0 h :

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0.424\,961\,96, & a_1 &= 0.256\,644\,54, & a_2 &= -0.009\,089\,66,\\
a_3 &= -0.000\,893\,63, & a_4 &= 0.000\,003\,24, & a_5 &= -0.000\,001\,37,\\
a_6 &= 0.000\,001\,75, & a_7 &= -0.000\,000\,03, & a_8 &= 0.000\,000\,02,\\
a_9 &= 0.000\,000\,10, & a_{10} &= -0.000\,000\,02.
\end{aligned}$$

On a :

$$DT = 33, \; t - t_0 = 12.375.$$

On en déduit par la formule (9.4.2) :

$$x = -1 + \frac{2(t - t_o)}{DT} = -0.25.$$

On peut calculer les polynômes de Tchebychev de seconde espèce par l'un des deux algorithmes suivants.

• Algorithme 1

Les polynômes $U_p(x)$ sont calculés par la relation (9.4.7). On a $\theta = 104°.477\,5122$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
U_0(x) &= \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1 & U_1(x) &= \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = -0.5\\
U_2(x) &= \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = -0.75 & U_3(x) &= \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = 0.875\\
U_4(x) &= \frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 0.3125 & U_5(x) &= \frac{\sin 6\theta}{\sin\theta} = -1.031\,25\\
U_6(x) &= \frac{\sin 7\theta}{\sin\theta} = 0.203\,125 & U_7(x) &= \frac{\sin 8\theta}{\sin\theta} = 0.929\,6875\\
U_8(x) &= \frac{\sin 9\theta}{\sin\theta} = -0.667\,968\,75 & U_9(x) &= \frac{\sin 10\theta}{\sin\theta} = -0.595\,703\,125.
\end{aligned}$$

• Algorithme 2

Les polynômes $U_p(x)$ sont calculés par la relation de récurrence (9.4.8).
On a : $U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x = -0.5$. On en déduit :

$$U_2(x) = 2xU_1 - U_0 = -0.75,$$
$$U_3(x) = 2xU_2 - U_1 = 0.875, \text{ etc.}$$

Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce $U_p(x)$ étant déterminés, la vitesse X' se déduit de la formule (9.4.6). On a :

$$X' = \frac{2}{33}(0.256\,644\,54\,U_0 - 2 \times 0.009\,089\,66\,U_1 + \ldots - 10 \times 0.000\,000\,02\,U_9)$$

soit, finalement :

$$X' = 0.016\,226\,84 \text{ ua/jour.}$$

Exemple 3. Calculer les coordonnées tangentielles X, Y de Téthys (troisième satellite de Saturne) par rapport à la planète et leurs vitesses $X' = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}, Y' = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$, le 4 janvier 1998 à 23 h 29 min 59 s UTC.

On effectue la même correction de 63 s que dans l'exemple 1 pour se ramener à l'argument des éphémérides. La date t est donc le 4 janvier 1998 à 23 h 31 min 02 s argument des éphémérides. On utilise les coefficients de la page B120 valables du 0 janvier 0 h au 16 janvier 0 h. On a, pour X :

$$\begin{array}{lllll} A0 = -0.000\,200, & A1 = 0.0, & B0 = 43.910\,800, & F0 = 2.057\,580, & B1 = 0.081\,140, \\ F1 = 5.427\,700, & B2 = 0.000\,571, & F2 = 0.794\,200, & C0 = 0.004\,600, & P0 = 1.112\,100, \end{array}$$

et, pour Y :

$$\begin{array}{lllll} A0 = 0.000\,700, & A1 = 0.0, & B0 = 7.673\,200, & F0 = 0.081\,744, & B1 = 0.005\,560, \\ F1 = 1.857\,500, & B2 = 0.000\,241, & F2 = 0.290\,500, & C0 = 0.000\,800, & P0 = 5.441\,500. \end{array}$$

On applique ensuite les formules (9.4.5) et (9.4.9) avec $N = 3.3280$ radians/jour et u (nombre de jours écoulés entre le 0 janvier à 0 h et le 4 janvier à 23 h 31 min 02 s) = 4.979 884 jours. On obtient finalement :

$$X = -9''.553,$$
$$Y = -6''.243,$$
$$X' = 141.271\ ''/\text{jour},$$
$$Y' = -14.845\ ''/\text{jour}.$$

Exemple 4. Calculer les dates des phénomènes du satellite Io au voisinage du 30 juin 1998.

Nous effectuons le calcul complet pour le début d'éclipse (EC.D) pour lequel les tables de la page B106 donnent :

$$t_o = 0,\ P = 1.769\,8605 \text{ jour},\ DT = 366 \text{ jours.}$$

Du 0 janvier 0 h au 30 juin 1998, 181 jours se sont écoulés. On a donc :

$$t = 181 \text{ jours},$$
$$x = -1 + \frac{2(t - t_o)}{DT} = -0.010\,928\,962.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\tau = 14.302\,609 &- 0.155\,348\,x &&- 0.054\,867\,x^2 &&+ 0.513\,377\,x^3 &&+ 0.369\,782\,x^4 \\ &- 0.250\,408\,x^5 &&- 0.683\,645\,x^6 &&+ 0.003\,251\,x^7 &&+ 0.673\,686\,x^8 \\ &+ 0.052\,935\,x^9 &&- 0.363\,905\,x^{10} &&- 0.016\,885\,x^{11} &&+ 0.084\,030\,x^{12},\end{aligned}$$

soit,

$$\tau = 14.304\,300\,.$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned}k = &\text{ partie entière de } (181 - 0)/1.769\,8605 \\ = &\ 102.\end{aligned}$$

On obtient alors la date approchée t_1 du début d'éclipse de Io (EC.D) :

$$t_1 = kP + \tau/24 + t_o = 102 \times 1.769\,8605 + 14.304\,300/24 + 0,$$
$$t_1 = 181.121\,784 \text{ jours}.$$

Donc 181.121 784 jours se sont écoulés depuis le 0 janvier (début de l'intervalle pour ces phénomènes), ce qui correspond au 30 juin 1998 à 2 h 55 min 22 s (TT). Le calcul réitéré donne $t_2 = 181.121\,779$ jours, soit le 30 juin 1998 à 2 h 55 min 22 s (TT).

On trouverait de même les dates des autres phénomènes de Io, et après avoir effectué le tri chronologique on obtiendrait :

EC.D	le 30 juin à 2 h 55 min 22 s	OC.D	le 30 juin à 4 h 18 min 13 s inobservable car éclipsé
EC.F	le 30 juin à 5 h 11 min 41 s inobservable car occulté	OC.F	le 30 juin à 6 h 32 min 53 s
OM.D	le 1 juill. à 0 h 4 min 59 s	PA.D	le 1 juill. à 1 h 25 min 46 s
OM.F	le 1 juill. à 2 h 19 min 23 s	PA.F	le 1 juill à 3 h 38 min 46 s

9.5. BIBLIOGRAPHIE

Abramovitz, M., Stegun, I. : 1968, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications.

Aoki, S., Guinot, B., Kaplan, G.H., Kinoshita, H., McCarthy, D.D., Seidelmann, P.K. : 1982, The new definition of Universal Time, *Astron. Astrophys.* **105**, 359.

Arlot, J.-E. : 1982, New constants for Sampson-Lieske theory of the Galilean satellites of Jupiter, *Astron. Astrophys.* **107**, 305.

Bakhvalov, N. : 1976, *Méthodes numériques*, éditions MIR, Moscou.

Bretagnon, P., Chapront, J. : 1981, Note sur les formules pour le calcul de la précession, *Astron. Astrophys.* **103**, 103.

Bretagnon, P. : 1982, Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP82, *Astron. Astrophys.* **114**, 278.

Bureau des longitudes : 1979, *Connaissance des Temps*, Gauthier-Villars éd., Paris.

Bureau des longitudes : 1993, *Connaissance des Temps*, SHOM éd., Brest.

Chapront, J. : 1982, The Fourier-Chebychev approximation for time series with a great many terms, *Celest. Mech.* **28**, 415.

Chapront, J., Vu, D.T. : 1984, A new compact representation of ephemerides : application to the motion of Pluto, the Sun and the Galilean satellites of Jupiter, *Astron. Astrophys.* **141**, 131.

Chapront-Touzé, M. : 1990, Orbits of the Martian satellites from ESAPHO and ESADE theories, *Astron. Astrophys.* **240**, 159.

Chapront-Touzé, M., Chapront, J. : 1983, The lunar ephemeris ELP 2000, *Astron. Astrophys.* **124**, 50.

Dourneau, G. : 1987, Observations et étude du mouvement des huit premiers satellites de Saturne, *Thèse d'état*, université Bordeaux I.

Duncombe, R.L. : 1969, Heliocentric coordinates of Ceres, Pallas, Juno, Vesta 1928-2000, *Astron. Pap. Amer. Ephem.* **20**, part 2.

Eckert, W.J., Jones, R., Clark, H.K. : 1954, *Improved Lunar Ephemeris*, US Government Office, Washington.

Francou, G., Bergeal, L., Chapront, J., Morando, B. : 1983, Nouvelles éphémérides du Soleil, de la Lune et des planètes, *Astron. Astrophys.* **128**, 124.

Fricke, W., Schawn, H., Lederle, T. : 1988, Fifth fundamental catalogue FK5, *Veröff. Astron. Rechen-Institute Heidelberg* **32**, Heidelberg.

Fricke, W. : 1982, Determination of the equinox and equateur of the FK5, *Astron. Astrophys.* **107**, L13.

Kozaï, Y. : 1959, The motion of a close Earth satellite, *Astron. J.* **64**, 367.

Lanczos, C. : 1964, *Applied analysis*, Pitman Press.

Laskar, J., Jacobson, R.A. : 1987, GUST86. An analytical ephemeris of the Uranian satellites, *Astron. Astrophys.* **188**, 212.

Lieske, J.H. : 1977, Theory of motion of Jupiter's Galilean satellites, *Astron. Astrophys.* **56**, 333.

Lieske, J.H., Lederle, T., Fricke, W., Morando, B. : 1977, Expressions for the precession quantities based upon the IAU (1976) system of astronomical constants, *Astron. Astrophys.* **58**, 1.

Newcomb, S. : 1894, Secular variations of the orbits of the four inner planets, *Astron. Pap. Amer. Ephem.* **5**, part 4.

Rapaport, M. : 1977, Contribution à l'étude dynamique des satellites de Saturne, *Thèse d'état*, université Bordeaux I.

Rocher, P. : 1982, 1990, Intégrations numériques des petites planètes Cérès, Pallas, Junon, Vesta, CPJV, communications privées.

Sampson, R.A. : 1921, Theory of the four great satellites of Jupiter, *Mem. Roy. Astron. Soc.* **63**, 1.

Simon, J.-L. : 1983, Théorie du mouvement des quatre grosses planètes. Solution TOP82, *Astron. Astrophys.* **120**, 197.

Standish, E.M. : 1982, Orientation of the JPL ephemerides DE200/LE200 to the dynamical equinox J2000, *Astron. Astrophys.* **114**, 297.

Standish, E.M. : 1990, The observational basis of JPL's DE200, the planetary ephemerides of the Astronomical Almanac, *Astron. Astrophys.* **233**, 252.

Standish, E.M., Williams, J.G., Newhall, XX : 1981, Intégration numérique DE200/LE200, bande magnétique.

Struve, G. : 1930, Neue unterssuchungen in Saturnsystem, *Veröff. Univ. Sternw. Berlin Babelsberg* **6**.

Thuillot, W. : 1983, Théorie des phénomènes des satellites galiléens de Jupiter. Une représentation en polynômes de Tchebychev, *Astron. Astrophys.* **127**, 63.

Thuillot, W. : 1989, Prédiction des phénomènes des satellites galiléens, *Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes* **S015**.

UAI : 1977, *Trans. IAU*, Grenoble 1976, vol. **XVI B**, Reidel, Dordrecht.

UAI : 1980, *Trans. IAU*, Montréal 1979, vol. **XVII B**, Reidel, Dordrecht.

UAI : 1991, *Trans. IAU*, Buenos-Aires, vol. **XXI B**, Reidel, Dordrecht.

Wahr, J.M. : 1981, The forced nutations of an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* **64**, 705.