

**Comment calculer les circonstances locales d'un passage
de Vénus devant le Soleil.**

P. Rocher (IMCCE) PR02

Version 2.0

lundi 5 avril 2004

I. Positions des astres par rapport au centre de la Terre.

La position d'un corps céleste dans l'espace est connue lorsque l'on connaît ses coordonnées dans un repère tridimensionnel orthonormé que l'on s'est fixé. La première chose à définir est donc ce repère tridimensionnel. Pour cela il faut définir trois directions orthogonales particulières définissant trois axes Ox , Oy , Oz et une origine O . On pourrait prendre des directions quelconques, mais il est judicieux de choisir des directions particulières qui varient le moins possible par rapport au globe terrestre. C'est pourquoi on prend comme direction de l'axe Oz la direction de l'axe de rotation de la Terre sur elle-même (direction du pôle céleste). Le plan normal à cette direction (plan Oxy) est un plan parallèle à l'équateur terrestre. Dans ce plan on choisit également une direction Ox particulière qui bouge le moins possible au cours du temps. On choisit la direction de l'équinoxe de printemps intersection du plan de l'équateur terrestre et du plan orbital de la Terre (plan de l'écliptique). En fait, ce trièdre n'est pas totalement fixe car l'axe de rotation de la Terre est animé de petits mouvements. Mais à chaque instant on peut définir un repère instantané qui porte le nom de repère équatorial vrai. Ce repère peut être centré sur le centre de notre choix, si c'est le Soleil, le repère est dit héliocentrique, si c'est le centre de la Terre le repère est dit géocentrique et si c'est un lieu quelconque sur la Terre le repère est dit topocentrique.

Dans un repère cartésien, la position de chaque corps du système solaire est connue grâce à ses coordonnées cartésiennes (x,y,z) . En réalité les astronomes mesurent plutôt des angles que des distances ; c'est pourquoi, parallèlement aux coordonnées cartésiennes ils utilisent également un système de coordonnées polaires construit à partir du même repère. Ce système de coordonnées comportent trois coordonnées, une longueur (Δ) et deux angles (α et δ). La longueur ou rayon vecteur est la distance entre l'origine O du repère et le corps. L'angle α s'appelle l'ascension droite et est l'angle entre la projection orthogonale de la direction du corps dans le plan de l'équateur (Oxy) et l'axe Ox . Le second angle δ s'appelle la déclinaison, c'est l'angle entre la direction de l'astre et sa projection orthogonale dans le plan Oxy , voir figure 1.

Lorsque l'on utilise uniquement les deux angles, tous les corps sont supposés être à la même distance ($\Delta = 1$), ce système de coordonnées polaires porte alors le nom de sphère céleste.

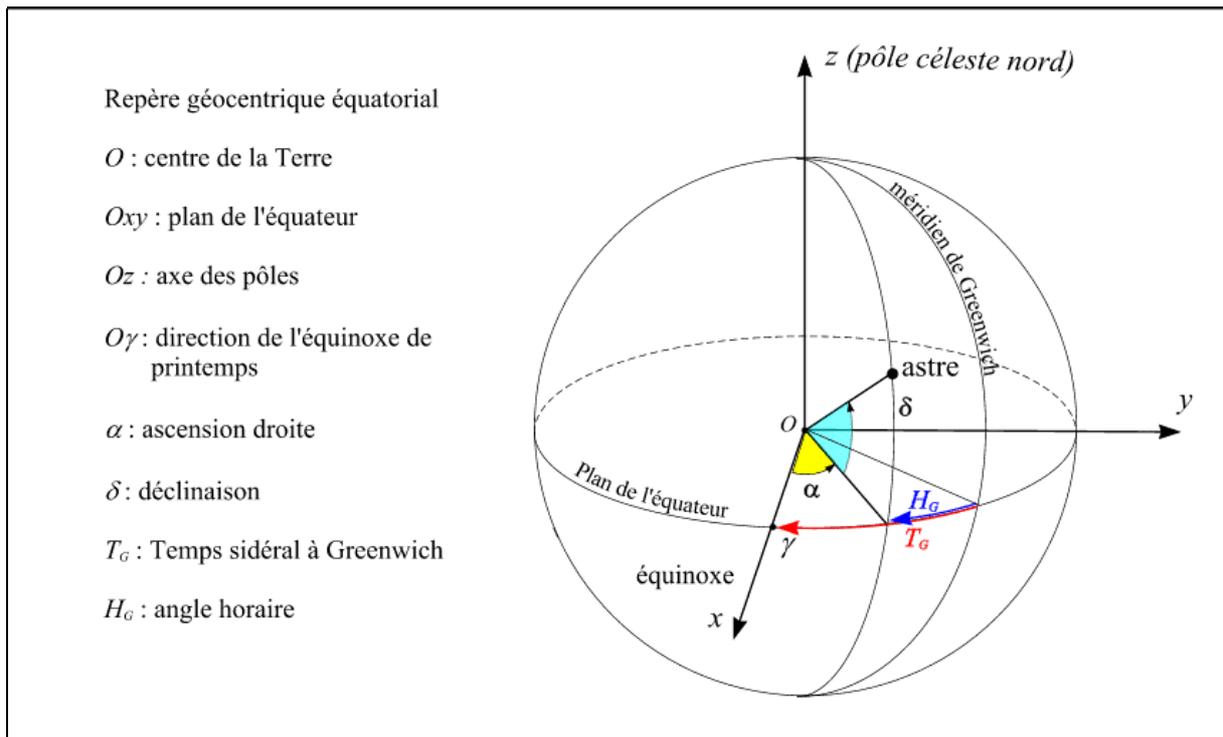


FIGURE 1. – *La sphère céleste équatoriale.*

À chaque instant t les théories planétaires permettent de calculer les coordonnées cartésiennes apparentes géocentriques des planètes qui donnent la position apparente de chaque planète telle qu'elle est vue depuis le centre de la Terre. Ces coordonnées ne sont pas les positions géométriques des corps, elles tiennent compte de toutes les corrections et aberrations liées aux mouvements des corps et à la vitesse finie de la propagation de la lumière (nutations, précession, aberration planétaire et temps de lumière), seule la réfraction atmosphérique n'est pas prise en compte.

On passe d'un système de coordonnées à l'autre à l'aide des formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 x &= \Delta \cos \delta \cos \alpha \\
 y &= \Delta \cos \delta \sin \alpha \\
 z &= \Delta \sin \delta
 \end{aligned}
 \quad (1) \quad \text{et} \quad
 \begin{aligned}
 \Delta &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
 \alpha &= \arctan(y/x) \\
 \delta &= \arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2})
 \end{aligned}
 \quad (2)$$

Soient α , δ et Δ les coordonnées équatoriales apparentes géocentriques du Soleil, α_v , δ_v et Δ_v les coordonnées équatoriales apparentes géocentriques de Vénus, alors $\Delta\alpha = \alpha_v - \alpha$ et $\Delta\delta = \delta_v - \delta$ sont les coordonnées différentielles équatoriales sphériques de la planète par rapport au Soleil.

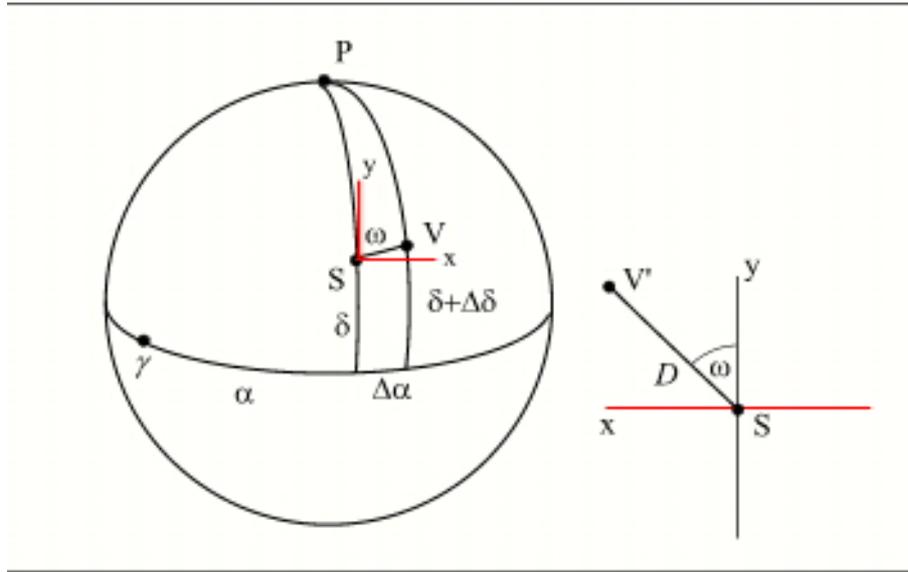


FIGURE 2. – *Coordonnées différentielles.*

Sur la sphère céleste équatoriale géocentrique, soit S le centre du Soleil et V le centre de Vénus. Si l'on appelle D l'angle entre S et V et ω l'angle entre la direction du pôle et la direction SV compté dans le sens trigonométrique pour un observateur situé au centre de la sphère céleste géocentrique. Comme le système de coordonnées sphériques est direct, les axes rectangulaires, vus depuis le centre de la sphère sont orientés comme sur la figure 2. Le plan xSy est le plan tangent à la sphère céleste en S. V' est la projection de V sur ce plan tangent, alors les coordonnées différentielles planes (X, Y) de SV' sont données en radians par :

$$\begin{aligned} X &= \tan D \sin \omega = \frac{\cos(\delta + \Delta\delta) \sin \Delta\alpha}{\sin(\delta + \Delta\delta) \sin \delta + \cos(\delta + \Delta\delta) \cos \delta \cos \Delta\alpha} \\ Y &= \tan D \cos \omega = \frac{\sin(\delta + \Delta\delta) \cos \delta - \cos(\delta + \Delta\delta) \sin \delta \cos \Delta\alpha}{\sin(\delta + \Delta\delta) \sin \delta + \cos(\delta + \Delta\delta) \cos \delta \cos \Delta\alpha} \end{aligned} \quad (3)$$

La distance SV' entre le centre du Soleil et le centre de Vénus dans le plan tangent est alors égale à : $SV' = \sqrt{X^2 + Y^2} = \tan D$.

Si l'on note d et d' les projections des demi-diamètres apparents du Soleil et de Vénus. Les instants t_1 et t_4 des contacts extérieurs géocentriques sont solutions de l'équation $SV' = d + d'$ et les instants t_2 et t_3 des contacts intérieurs géocentriques sont les solutions de l'équation $SV' = d - d'$. Ces calculs se font par approximations successives.

Les projections des demi-diamètres apparents de Vénus et du Soleil se calculent à partir des rayons r_v et r de Vénus et du Soleil exprimés en kilomètres et des distances Δ_v et Δ de Vénus et du Soleil à la Terre par les formules suivantes :

$$d = \tan \left(\arcsin \left(\frac{r}{\Delta} \right) \right) \quad \text{et} \quad d' = \tan \left(\arcsin \left(\frac{r_v}{\Delta_v} \right) \right)$$

L'instant t_m du minimum de distance entre Vénus et le Soleil se calcule de même en calculant le zéro de la fonction $(X\dot{X} + Y\dot{Y})$ et la distance minimale est donnée par la valeur de SV' à cet instant.

II. Le calcul des circonstances locales.

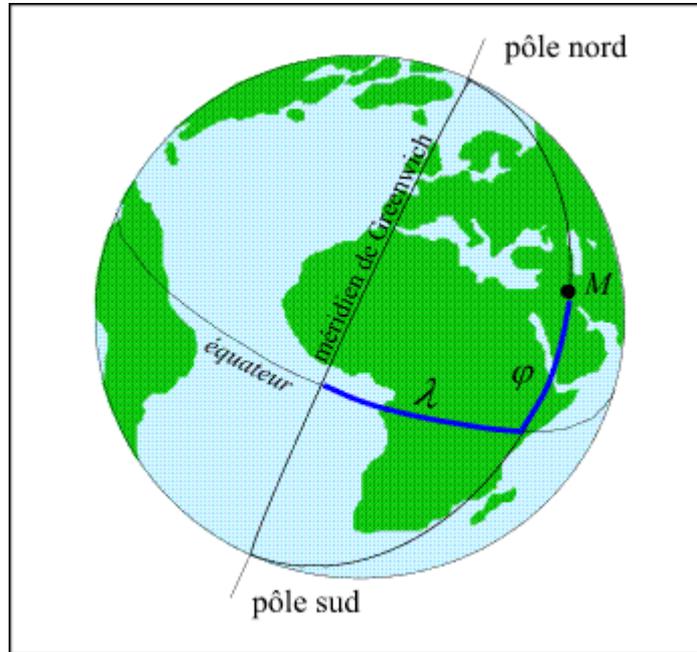


FIGURE 3. – Coordonnées géographiques.

La position d'un point M à la surface du globe terrestre est définie par ses coordonnées géographiques (figure 3) : sa latitude φ par rapport à l'équateur et sa longitude λ par rapport à un méridien origine (méridien de Greenwich). La Terre tourne autour de son axe d'un mouvement quasi uniforme en raison de un tour en 23h 56m 4s de temps universel (révolution sidérale de la Terre). Pour connaître à un instant t la position d'un observateur par rapport au repère $Oxyz$, il suffit de connaître à cet instant l'angle que fait le méridien de Greenwich avec la direction de l'axe Ox . Cet angle T_G s'appelle le temps sidéral vrai à Greenwich à l'instant t . L'angle T_L que fait le méridien du lieu d'observation M avec l'axe Ox au même instant, et qui porte le nom de temps sidéral local, est alors égal au temps sidéral vrai à Greenwich plus ou moins la longitude du lieu (en fonction de la position est ou ouest du lieu par rapport à Greenwich). Ainsi si les longitudes sont comptées positivement vers l'ouest et négativement vers l'est on a :

$$T_L = T_G - \lambda$$

Alors les coordonnées cartésiennes du vecteur \mathbf{OM} (ξ, η, ζ) du lieu dans le repère équatorial géocentrique vrai se calculent à l'aide des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \xi &= R \cos \varphi \cos(T_G - \lambda) \\ \eta &= R \cos \varphi \sin(T_G - \lambda) \\ \zeta &= R \sin(T_G - \lambda) \end{aligned} \quad (4)$$

R étant le rayon terrestre.

Attention les unités utilisées doivent être cohérentes, si les coordonnées géocentriques sont exprimées en unités astronomiques, R doit également être en unités astronomiques, alors R est égal au rapport du rayon équatorial terrestre exprimé en kilomètres sur la valeur de l'unité astronomique exprimée également en kilomètres ; c'est donc aussi la valeur de la parallaxe horizontale équatoriale moyenne du Soleil exprimé en radians.

On peut raffiner le calcul en tenant compte de l'aplatissement terrestre f et de l'altitude h de l'observateur ; les formules deviennent alors :

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \varphi' \cos(T_G - \lambda) \\ \eta &= \rho \cos \varphi' \sin(T_G - \lambda) \\ \zeta &= \rho \sin(T_G - \lambda)\end{aligned}\quad (5)$$

avec

$$\begin{aligned}\rho \cdot \cos \varphi' &= \cos u + \frac{h}{R} \cos \varphi \\ \rho \cdot \sin \varphi' &= (1 - f) \sin u + \frac{h}{R} \sin \varphi \\ \tan u &= (1 - f) \tan \varphi\end{aligned}$$

La hauteur h de l'observateur est exprimée dans la même unité que R .

Le calcul direct.

De nos jours, le calcul direct à l'aide d'un ordinateur ne pose aucun problème.

Pour cela il suffit de reprendre les formules utilisées pour le calcul géocentrique en remplaçant les coordonnées géocentriques par les coordonnées topocentriques. Les vecteurs positions topocentriques MV et MS joignant le point M au centre V de Vénus et au centre S du Soleil s'obtiennent par différences des vecteurs géocentriques correspondants et du vecteur OM joignant le centre de la Terre à l'observateur.

Le calcul approché.

La méthode approchée consiste à faire un certain nombre de simplifications.

Comme $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ et D sont de l'ordre du demi-diamètre solaire, on peut dans les équations donnant les coordonnées différentielles planes tangentielles X et Y négliger les quantités du troisième ordre sans introduire sur D et ω des erreurs supérieures au centième de seconde. Ce qui permet de mettre la formule (1) sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{aligned}X &= D \sin \omega = \Delta\alpha \cos \delta - \Delta\alpha \Delta\delta \sin \delta \sin 1'' \\ Y &= D \cos \omega = \Delta\delta + \frac{1}{4} \Delta\alpha^2 \sin 2\delta \sin 1''\end{aligned}\quad (6)$$

Le terme $\sin 1''$ permet d'avoir les différentes coordonnées exprimées en secondes de degré, c'est la valeur en radians d'un angle de une seconde de degré. Si les valeurs $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ sont en secondes de degré, on obtient les valeurs X et Y dans la même unité.

Calcul de la parallaxe en coordonnées différentielles tangentielles

Notons les paramètres et coordonnées topocentriques avec un indice p .

Les équations précédentes pour un lieu donné s'écrivent :

$$\begin{cases} X_p = \Delta\alpha_p \cos \delta_p - \Delta\alpha_p \Delta\delta_p \sin \delta_p \sin 1'' \\ Y_p = \Delta\delta_p + \frac{1}{4} \Delta\alpha_p^2 \sin 2\delta_p \sin 1'' \end{cases} \quad (7)$$

Dans les seconds termes de ces équations qui sont de l'ordre du carré du demi-diamètre solaire, on peut négliger la parallaxe, c'est-à-dire remplacer les coordonnées topocentriques par des coordonnées géocentriques, sans qu'il en résulte d'erreur atteignant un dixième de seconde dans les valeurs de X_p et Y_p . Ce qui donne pour ces équations à ce degré d'approximation :

$$\begin{cases} X_p = \Delta\alpha_p \cos \delta_p - \Delta\alpha\Delta\delta \sin \delta \sin 1'' \\ Y_p = \Delta\delta_p + \frac{1}{4} \Delta\alpha^2 \sin 2\delta \sin 1'' \end{cases} \quad (8)$$

De même si l'on prend la déclinaison géocentrique δ du Soleil à la place de sa déclinaison topocentrique dans le calcul du cosinus du premier terme, l'erreur sera inférieure à 0,02".

Les équations ont donc la forme finale suivante :

$$\begin{cases} X_p = \Delta\alpha_p \cos \delta - \Delta\alpha\Delta\delta \sin \delta \sin 1'' \\ Y_p = \Delta\delta_p + \frac{1}{4} \Delta\alpha^2 \sin 2\delta \sin 1'' \end{cases} \quad (9)$$

et si l'on pose :

$$X_p = X + U \quad \text{et} \quad Y_p = Y + V$$

nous aurons :

$$\begin{aligned} U &= [\alpha_{vp} - \alpha_v - (\alpha_p - \alpha)] \cos \delta \\ V &= \delta_{vp} - \delta_v - (\delta_p - \delta) \end{aligned}$$

U et V sont donc les expressions de la parallaxe en coordonnées différentielles tangentielles.

Nous allons faire apparaître dans ces expressions les coordonnées cartésiennes de l'observateur. Si l'on désigne de nouveau par (ξ, η, ζ) , les coordonnées cartésiennes équatoriales du lieu d'observation, à l'époque t , nous avons par les formules de la parallaxe en coordonnées équatoriales :

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \alpha + \frac{\xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha}{\Delta \cos \delta \sin 1''} \\ \delta_p &= \delta + \frac{\xi \sin \delta \cos \alpha + \eta \sin \delta \sin \alpha - \zeta \cos \delta}{\Delta \sin 1''} \\ \alpha_{vp} &= \alpha_v + \frac{\xi \sin \alpha_v - \eta \cos \alpha_v}{\Delta_v \cos \delta_v \sin 1''} \\ \delta_{vp} &= \delta_v + \frac{\xi \sin \delta_v \cos \alpha_v + \eta \sin \delta_v \sin \alpha_v - \zeta \cos \delta_v}{\Delta_v \sin 1''} \end{aligned}$$

Dans les deux dernières formules on peut remplacer les sinus et les cosinus de la déclinaison et de l'ascension droite de Vénus par ceux du Soleil sans commettre d'erreur supérieure à 0,2".

$$\begin{aligned}\alpha_p &= \alpha + \frac{\xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha}{\Delta \cos \delta \sin 1''} \\ \delta_p &= \delta + \frac{\xi \sin \delta \cos \alpha + \eta \sin \delta \sin \alpha - \zeta \cos \delta}{\Delta \sin 1''} \\ \alpha_{vp} &= \alpha_v + \frac{\xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha}{\Delta_v \cos \delta \sin 1''} \\ \delta_{vp} &= \delta_v + \frac{\xi \sin \delta \cos \alpha + \eta \sin \delta \sin \alpha - \zeta \cos \delta}{\Delta_v \sin 1''}\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de U et V , et en posant :

$$\frac{1}{\Delta_v} - \frac{1}{\Delta} = W$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned}U &= \frac{W}{\sin 1''} (\xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha) \\ V &= \frac{W}{\sin 1''} (\xi \sin \delta \cos \alpha + \eta \sin \delta \sin \alpha - \zeta \cos \delta)\end{aligned} \quad (10)$$

or on a également par définition :

$$\begin{aligned}X_p &= D_p \sin \omega_p = X + U \\ Y_p &= D_p \cos \omega_p = Y + V\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}D_p &= \sqrt{(X+U)^2 + (Y+V)^2} \\ \omega_p &= \arctan\left(\frac{X+U}{Y+V}\right)\end{aligned}$$

d'où en négligeant le carré de la parallaxe solaire,

$$\begin{aligned}D_p &= D + U \sin \omega + V \cos \omega \\ \omega_p &= \omega + \frac{V \sin \omega - U \cos \omega}{D \sin 1''}\end{aligned} \quad (11)$$

Les coordonnées équatoriales cartésiennes équatoriales de l'observateur en négligeant l'aplatissement terrestre sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\xi &= R \cos \varphi \cos (T_G - \lambda) = \pi_0 \sin 1'' \cos \varphi \cos (T_G - \lambda) \\ \eta &= R \cos \varphi \sin (T_G - \lambda) = \pi_0 \sin 1'' \cos \varphi \sin (T_G - \lambda) \\ \zeta &= R \sin \varphi = \pi_0 \sin 1'' \sin \varphi\end{aligned}$$

Où π_0 est la valeur de la parallaxe horizontale équatoriale moyenne du Soleil exprimée en secondes de degré.

En substituant ces valeurs dans la formule (6) donnant U et V , on trouve :

$$\begin{cases} U = \pi_0 W \cos \varphi \sin (\alpha - T_G + \lambda) \\ V = \pi_0 W [\sin \delta \cos \varphi \cos (\alpha - T_G + \lambda) - \cos \delta \sin \varphi] \end{cases} \quad (12)$$

Et en développant ces expressions et en regroupant les termes dépendant uniquement du lieu on obtient l'expression suivante :

$$U \sin \omega + V \cos \omega = \pi_0 W (a \cos \varphi \cos \lambda + b \cos \varphi \sin \lambda + c \sin \varphi) \quad (13)$$

avec

$$\begin{cases} a = \sin (\alpha - T_G) \sin \omega + \sin \delta \cos (\alpha - T_G) \cos \omega \\ b = \cos (\alpha - T_G) \sin \omega - \sin \delta \sin (\alpha - T_G) \cos \omega \\ c = -\cos \delta \cos \omega \end{cases} \quad (14)$$

Alors la formule (11) s'écrit sous la forme suivante :

$$D_p = D + \pi_0 W (a \cos \varphi \cos \lambda + b \cos \varphi \sin \lambda + c \sin \varphi) \quad (15)$$

Les coefficients a , b et c sont indépendants de l'observateur, mais varient avec le temps, principalement à cause des changements rapides que subissent les angles T_G et ω durant le passage.

On remarque également que l'on a la relation suivante :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Calcul des instants de contacts topocentriques.

Nous allons utiliser les formules précédentes pour calculer les instants des contacts topocentriques à partir des instants des contacts géocentriques.

Si l'on affecte de l'indice 1 les paramètres des premiers contacts géocentriques, c'est à dire l'un des cas suivants :

Le premier contact géocentrique extérieur : $D_1 = d + d'$

ou le premier contact géocentrique intérieur : $D_1 = d - d'$

t_1 étant l'époque de ces contacts.

Pour un lieu quelconque de latitude φ et de longitude λ l'époque du contact $t_1 + \Delta t$ vérifie l'équation approchée suivante : $\left[X_1 + \left(\frac{dX}{dt} \right)_1 \Delta t_1 + U_1 \right]^2 + \left[Y_1 + \left(\frac{dY}{dt} \right)_1 \Delta t_1 + V_1 \right]^2 = \rho_1^2$

ρ_1 désignant la somme des demi-diamètres ou la différence des demi-diamètres en fonction du contact considéré.

En remarquant que $D_1^2 = X_1^2 + Y_1^2 = \rho_1^2$ et en négligeant les carrés et les produits du second ordre, on trouve :

$$\left[X_1 \left(\frac{dX}{dt} \right)_1 + Y_1 \left(\frac{dY}{dt} \right)_1 \right] \Delta t_1 + X_1 U_1 + Y_1 V_1 = 0$$

ce qui s'écrit également

$$\left(\frac{dD}{dt}\right)_1 \Delta t_1 + U_1 \sin \omega_1 + V_1 \cos \omega_1 = 0$$

Mais on a également pour une époque t quelconque et pour le lieu M la relation :

$$U \sin \omega + V \cos \omega = \pi_0 W (a \cos \varphi \cos \lambda + b \cos \varphi \sin \lambda + c \sin \varphi)$$

On en déduit que :

$$\Delta t_1 = -\frac{\pi_0 W_1}{\left(\frac{dD}{dt}\right)_1} (a_1 \cos \varphi \cos \lambda + b_1 \cos \varphi \sin \lambda + c_1 \sin \varphi) \quad (16)$$

Donc pour un point quelconque les instants des premiers contacts se calculent à l'aide de la formule suivante :

$$t_1 + \Delta t_1 = t_1 - \frac{\pi_0 W_1}{\left(\frac{dD}{dt}\right)_1} \times (a_1 \cos \varphi \cos \lambda + b_1 \cos \varphi \sin \lambda + c_1 \sin \varphi) \quad (17)$$

On peut faire un raisonnement identique pour les derniers contacts et l'on aura les formules suivantes, l'indice 2 correspondant aux derniers contacts.

$$\Delta t_2 = -\frac{\pi_0 W_2}{\left(\frac{dD}{dt}\right)_2} (a_2 \cos \varphi \cos \lambda + b_2 \cos \varphi \sin \lambda + c_2 \sin \varphi) \quad (18)$$

et

$$t_2 + \Delta t_2 = t_2 - \frac{\pi_0 W_2}{\left(\frac{dD}{dt}\right)_2} \times (a_2 \cos \varphi \cos \lambda + b_2 \cos \varphi \sin \lambda + c_2 \sin \varphi) \quad (19)$$

Autres formulations.

On trouve également une formulation légèrement différente de ces deux relations.

En remarquant que $\left(\frac{dD}{dt}\right) = \frac{X\dot{X} + Y\dot{Y}}{D}$ et que si l'on note $\Pi = \frac{R}{\Delta_v \cdot \sin 1''}$ la parallaxe de Vénus et $P = \frac{R}{\Delta \cdot \sin 1''}$ la parallaxe solaire exprimées en secondes de degré ; R, Δ et Δ_v doivent être exprimés en unités astronomiques, on a également $\pi_0 = \frac{R}{\sin 1''}$ donc :

$$\pi_0 \cdot W = \frac{R}{\sin 1''} \left(\frac{1}{\Delta_v} - \frac{1}{\Delta} \right) = \Pi - P$$

L'expression Δt prend alors la forme

$$\Delta t = -\frac{(\Pi - P)}{(X\dot{X} + Y\dot{Y})} D (a \cos \varphi \cos \lambda + b \cos \varphi \sin \lambda + c \sin \varphi)$$

Et en intégrant $-\frac{(\Pi - P)}{(X\dot{X} + Y\dot{Y})} \cdot D$ dans les coefficients a, b et c et en rappelant que $X=D \sin\omega$ et que $Y=D \cos\omega$ et en faisant apparaître la variable $H_G = T_G - \alpha$ l'expression Δt devient

$$\Delta t = (E \cos \varphi \cos \lambda + F \cos \varphi \sin \lambda + G \sin \varphi) \quad (20)$$

avec :

$$\begin{aligned} E &= \frac{(\Pi - P)}{(X\dot{X} + Y\dot{Y})} (X \sin H_G - Y \sin \delta \cos H_G) \\ F &= \frac{(\Pi - P)}{(X\dot{X} + Y\dot{Y})} (-X \cos H_G - Y \sin \delta \sin H_G) \\ G &= \frac{(\Pi - P)}{(X\dot{X} + Y\dot{Y})} (Y \cos \delta) \end{aligned} \quad (21)$$

L'angle H_G s'appelle l'angle horaire, c'est l'angle formé par la direction du méridien sud et la projection de la direction du corps (ici le Soleil) dans le plan équatorial (Oxy).

Pour calculer chaque contact du passage de Vénus en un lieu quelconque, il suffit de calculer les valeurs de ces trois coefficients pour chacun des contacts puis d'appliquer la relation précédente donnant le Δt pour chaque contact en chaque lieu considéré. Cette méthode est donc très rapide car elle ne nécessite que la connaissance de douze coefficients pour chaque passage de Vénus. Par contre sa précision n'est que de l'ordre du dixième de minute de temps, ce qui est suffisant pour prédire les instants des passages, mais est insuffisant si l'on désire réduire des observations et en déduire une valeur de la parallaxe solaire.